EISTI
ING1-GM : Probabilités 1. 17-18

TD2 : Probabilités Conditionnelles

Exercice 1. Soit l'expérience aléatoire de l'observation du temps de fonctionnement (en jours) d'une machine. On lui associe l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ avec $\Omega = [0,\ +\infty[$ et

$$\forall D \in \mathcal{A},\ \mathbb{P}(D) = \frac{1}{5} \int_D e^{-t/5}\, dt.$$

Soient les événements A, B et C suivants :

$$A = \text{"la machine fonctionne plus de 8 jours"},$$
$$B = \text{"la machine fonctionne entre 10 et 12 jours sans panne"},$$
$$C = \text{"la machine fonctionne moins de 10 jours"}.$$

1. Calculer $\mathbb{P}(B|A)$.
2. Calculer $\mathbb{P}(C|A)$.

Exercice 2. . Considérons un pays où il fait beau en moyenne 7 jours sur 10. Dans ce pays, deux stations de radio diffusent chaque matin un bulletin de prévision météorologique pour la journée. Une longue expérience a montré à M. Lambda que la station R avait raison, en moyenne, 95 sur 100, tandis que la station E n'avait raison, en moyenne, que 90 fois sur 100. Un matin M. Lambda doit sortir, il écoute alors les deux stations: R annonce qu'il pleuvra et E qu'il fera beau. Doit-il prendre son parapluie ?
(On fera des hypothèses d'indépendance qui s'imposent et on admettra que chaque station a la même fiabilité dans ses prévisions optimistes et dans ses prévisions pessimistes).

Exercice 3. Une personne se trouve devant une porte fermée à clef. Elle dispose d'un trousseau de clefs comportant n clefs parmi lesquelles une seule ouvre la porte. Elle essaie les clefs au hasard l'une après l'autre. Quelle est la probabilité p_k qu'elle ouvre la porte au $k^{ème}$ essai ? $(1 \leq k \leq n)$

Exercice 4. On lance deux dés parfaits et on appelle A_1 l'événement " le premier dé amène un nombre pair", A_2 l'événement " le deuxième dé amène un nombre pair", A_3 l'événement " la somme des nombres obtenus est paire".
Montrer que les événements A_1, A_2, A_3 sont indépendants deux à deux mais pas mutuellement indépendants.

Exercice 5. Soient A, B, C trois événements.
i) Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont indépendants.
ii) Si A et B sont indépendants, et si A et C sont indépendants et si de plus $B \subset C$, alors A et $C \setminus B$ sont indépendants.
iii) Tout événement est indépendant de tout événement de probabilité nulle ou de probabilité égale à 1
iv) Si $(A_n)_n$ est une suite d'événements deux à deux indépendants et si A est indépendant de A_n pour tout n, alors A est indépendant de l'union disjointe $\cup_n A_n$.

Exercice 6. Supposons A indépendant de $B \cap C$ et de $B \cup C$, puis B indépendant de $C \cap A$ et enfin C indépendant de $A \cap B$ et enfin C indépendant de $A \cap B$. Supposons, en outre, $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(C)$ strictement positifs. Montrer que A, B, C sont mutuellement indépendants.