Introduction aux Probabilités

I - Dénombrement

I - 1 Ensembles finis

I-1 Déf : un ensemble E non vide est dit fini s'il existe un entier naturel n non nul et une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur E. On admet qu'un tel entier n, s'il existe, il est unique. Il est appelé le cardinal de E. On le note $card(E)$ ou $|E|$. Par convention on dira que ϕ est fini et que $|\phi| = 0$. Un ensemble est dit infini s'il n'est pas fini.

Rq 1.1 Soit E un ensemble de cardinal $n \geq 1$. Une bijection de $[\![1, n]\!] \longrightarrow E$, $i \mapsto a_i$ permet de numéroter les éléments de E et d'écrire $E = \{a_1, .., a_n\}$.

exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $E = [\![1, n]\!]$ est de cardinal n car l'application identité est une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur $E = [\![1, n]\!]$

Prop : soit E de cardinal $n \geq 1$ et si F peut être mis en bijection avec E, alors F est aussi un ensemble fini de cardinal n.

I-2 Sous-ensembles d'un ensemble fini :

Prop$_1$ soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$ et a un élément de E, alors $E \setminus \{a\}$ est fini, de cardinal $n - 1$.

Prop$_2$: si E est un ensemble fini et F un sous-ensemble de E, alors F est fini et $card(F) \leq card(E)$. De plus, on a $card(F) = card(E)$ ssi $F = E$.

I-3 réunion d'ensembles finis

Prop$_1$ si A et B sont 2 ensembles finis disjoints, alors

$A \cup B$ est fini et on a $card(A \cup B) = card(A) + card(B)$.

corollaire 1 si A est un sous ensemble d'un ensemble fini E et $\bar{A}$ le complémentaire de A dans E, on a : $card(\bar{A}) = card(E) - card(A)$.

corollaire 2 si $A_1, \dots, A_n$ sont des ensembles finis, deux à deux disjoints alors $A_1 \cup \dots \cup A_n$ est fini et on a $card(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} card(A_i)$

Prop 2 si A et B sont 2 ensembles finis, alors $A \cup B$ est fini et on a :
$card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$.

I-4 Applications entre ensembles finis :

lemme soit E et F 2 ensembles, avec E fini. si f est une injection de E dans F, alors l'ensemble $f(E)$ est fini et $card(f(E)) = card(E)$.

Preuve : l'application $g : E \to f(E)$, $x \mapsto f(x)$ est bijective, car si $y \in f(E)$ il existe $x \in E$ tq $y = f(x)$ et donc $y = g(x)$; de plus x est unique car f est injective. Ainsi $f(E)$ est fini et $card(f(E)) = card(E)$.

Prop 1 soit E et F 2 ensembles, avec E fini. si f est une application de E dans F, alors l'ensemble $f(E)$ est fini et $card(f(E)) \leq card(E)$.
de plus on a $card(f(E)) = card(E)$ ssi f est injective.

Prop 2 soit E et F 2 ensembles finis de même cardinal, f une application de E dans F. Il y a équivalence entre : i) f injective ; ii) f surjective, iii) f bijective.

Rq on déduit de la prop. précédente que, s'il existe une application surjective d'un ensemble fini E dans un ensemble fini F, alors $card(F) \leq card(E)$. En effet, on a $card(f(E)) = card(F)$

II - Dénombrement : Dénombrer, c'est compter le nbre d'éléments d'un ensemble, c-a-d déterminer son cardinal. ②

1 - Produit cartésien d'ensembles finis :

Prop Soit E et F 2 ensembles finis. Alors le produit cartésien $E\times F$ est fini et $card(E\times F) = card(E)\times card(F)$.

Preuve : soit $m = card\,E$. On note alors $E = \{a_1, .., a_m\}$. On a alors $E\times F = (\{a_1\}\times F)\cup..\cup(\{a_m\}\times F)$.

chaque ensemble $\{a_i\}\times F$ a même cardinal que F, car l'application $n\mapsto(a_i, n)$ est bijective de F sur $\{a_i\}\times F$. $E\times F$ est fini car réunion d'ensembles finis et comme la réunion est disjointe, on a :

$card(E\times F) = \sum_{i=1}^{m} card(\{a_i\}\times F) = \sum_{i=1}^{m} card(F) = m\, card(F) = card(E)\times card(F)$

Corollaire 1. Soit $E_1, .., E_m$ des ensembles finis, alors $E_1\times..\times E_m$ est fini et on a $card(E_1\times..\times E_m) = \prod_{i=1}^{m} card(E_i)$.

2. Si E est un ensemble fini, alors $card(E^m) = (card(E))^m$

Rappel les éléments d'un produit cartésien de p ensembles sont appelés p-listes ou p-uplets, comme $card(E^p) = m^p$, il y a m^p p-lists de E ($card\,E = m$).

2. Applications

Prop Soit E et F des ensembles finis de cardinaux respectifs $p\geq 1$ et m. Alors l'ensemble F^E des applications de E dans F est un ensemble fini et on a $card(F^E) = m^p = (card(F))^{card(E)}$.

Parties d'un ensemble

Prop Si E est un ensemble de cardinal m, l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E a pour cardinal 2^m.

3. Arrangements

Def Soit $p\in\mathbb{N}^*$ et E un ensemble. On appelle p-arrangement d'éléments de E, toute p-liste d'éléments de E 2 à 2 distincts

Th : soit E un ensemble de cardinal n et $p \in \mathbb{N}^*$. le nombre de p-arrangements d'éléments de E est :

$$n(n-1)\cdots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} \equiv A_n^p \quad \text{si } p \leq n$$

avec $A_n^p = 0$ si $p > n$.

exemples 1) le nombre de mots de p lettres distinctes qu'on peut former avec un alphabet de n lettres est A_n^p.

2) une course de chevaux comporte 20 partants. le nombre de résultats possibles de tiercés dans l'ordre est A_{20}^3.

Prop le nombre d'injections d'un ensemble E de cardinal p dans un ensemble F de cardinal n est A_n^p.

Corollaire 1 si $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F) = n$, le nombre de bijections de E sur F est $n!$.

Corollaire 2 le nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n est $n!$

4- Combinaisons

Th : soit $n, p \in \mathbb{N}$. le nombre de sous-ensembles de cardinal p d'un ensemble E de cardinal ~~n~~ n est $\binom{n}{p}$.

Rq 1.) si n et p sont des entiers tq $0 \leq p \leq n$, le nombre de sous-ensembles de cardinal p d'un ensemble de cardinal n est donc $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

2.) un sous ensemble de E de cardinal p est aussi appelé une p-combinaison d'éléments de E. cela explique la notation C_n^p (c'est ~~le~~ le nombre de p-combinaisons d'un ensemble de cardinal n) parfois employé à la place de $\binom{n}{p}$.

3- si $n < p$ alors $\binom{n}{p} \equiv C_n^p = 0$, en effet, dans un ensemble de cardinal n, il n'y a pas de sous-ensemble de cardinal strictement plus grand. on fait la convention $\binom{n}{p} = C_n^p = 0$ si $p < 0$.

ppté's des coefficients $\binom{n}{p}$

Prop 1 si $n, p \in \mathbb{N}$ tq $0 \leq p \leq n$ on a :
$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

prop 2 si $n, p \in \mathbb{N}$ tq $1 \leq p \leq n$ on a :
$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.$$

Formule du binôme :
soit $a, b \in \mathbb{R}$ alors $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Rq si $a = b = 1$ alors $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$.

application soit E de cardinal n. on note pour $0 \leq k \leq n$, $P_k(E)$ l'ensemble ds parties de E de cardinal k, alors $P(E)$ est la réunion disjointe de $P_0(E), P_1(E), \ldots, P_n(E)$.
donc $\mathrm{card}(P(E)) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{card}(P_k(E)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Espaces probabilisés finis

1 - Defs
Def 1 soit Ω un ensemble fini et $P(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω.
- le couple $(\Omega, P(\Omega))$ est appelé espace probabilisable.
- Les elements de $P(\Omega)$ sont appelés évenements

Les singletons $\{w\}$ de Ω sont appelés événements élémentaires.

<u>Def 2</u> on appelle probabilité définie sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ toute application $\mathbb{P}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$ vérifiant les 2 axiomes :

1°/ $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

2°/ $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, tq $A \cap B = \phi$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est appelé espace probabilisé fini. Pour tout événement A, le réel $\mathbb{P}(A)$ est appelé probabilité de l'événement A.

3/ <u>ppts</u> Th 1 soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, soit A et B 2 événements on a :

1°/ $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$, donc $\mathbb{P}(\phi) = 0$

2°/ $\mathbb{P}(A - B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

3°/ si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

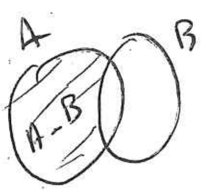
4°/ $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

<u>Preuve:</u> on peut visualiser les ppts des probabilités en représentant Ω par une portion du plan d'aire égale à 1, et chaque événement A par une partie de Ω d'aire $\mathbb{P}(A)$.

1°/ $\Omega = A \cup \bar{A}$ et $A \cap \bar{A} = \phi \Rightarrow \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A})$ (axiomes 1°/ et 2°/

$\Rightarrow 1 = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A})$

$\Rightarrow \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

2°/ 

on a $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ et $(A - B) \cap (A \cap B) = \phi$

d'où $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A - B) + \mathbb{P}(A \cap B)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A - B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

3°/ si $A \subset B$ alors $B = A \cup (B - A)$ avec $A \cap (B \setminus A) = \phi$

$\Rightarrow \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B - A) \Rightarrow \mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$.

4°/ $A \cup B = B \cup (A - B)$ et $B \cap (A - B) = \phi$ d'où

$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A - B) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Th2 . Pour toute famille $(A_i)_{1\leq i\leq m}$ d'événements 2 à 2 disjoints

on a $P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i)$

. Pour tout événement A on a $P(A) = \sum_{i/w_i\in A} P(\{w_i\})$

3.) Détermination d'une probabilité sur un espace probabilisable fini

La proba. P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est entièrement déterminée par la connaissance des probas. des événements élémentaires.

Th & Def soit $\Omega = \{w_1, .., w_m\}$; soit $p_1, .., p_m$ m nombres réels.

Il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ tq $\forall i \in [\![1,m]\!]$

$P(\{w_i\}) = p_i$ ssi $\begin{cases} \forall i \in [\![1,m]\!], \ p_i \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \end{cases}$

P est alors unique et on a pour tout événement A, $P(A) = \sum_{i/w_i\in A} p_i$

4°) équiprobabilité

Def on dit qu'il y a équiprobabilité lorsque les probas. de tous les événements élémentaires sont égals. on dit aussi que P est la probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Th3 s'il y a équiprobabilité, pour tout événement A on a:

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

on écrit aussi $P(A) = \dfrac{\text{nbre de cas favorables}}{\text{nbre de cas totals}}$.

Preuve: soit $\lambda \in [0,1]$ tq $\forall i \in [\![1,m]\!]$ $p_i = \lambda$

or $1 = \sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda = m\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{1}{m} = \frac{1}{\text{card}\,\Omega}$

et pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A) = \sum_{i/w_i\in A} p_i = (\text{card}\,A)\lambda = \dfrac{\text{card}\,A}{\text{card}\,\Omega}$

exemple expérience 1 : on jette un dé cubique dont les faces sont numérotés de 1 à 6 et on lit le numéro apparu.

expérience 2 : on jette 2 fois un dé cubique et on note les numéros obtenus.

expérience 1 : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ soit $A_1 = \{2,4,6\}$ et $A_2 = \{4,5,6\}$

$\forall i \in [\![1,6]\!]$ $P(\{i\}) = \frac{1}{6} \Rightarrow P(A_1) = \frac{\text{card } A_1}{\text{card } \Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

de même $P(A_2) = \frac{\text{card } A_2}{\text{card } \Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

__expérience 2__ : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$ soit $B = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$.

$\forall i,j \in [\![1,6]\!]$ $P(\{(i,j)\}) = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$ et $P(B) = \frac{\text{card } B}{\text{card } \Omega} = \frac{5}{36}$.

__Rq__ si dans l'expérience 1, le dé est truqué de façon que chaque face ait une proba. de sortie proportionnelle au numéro qu'elle porte alors $\forall i \in [\![1,6]\!]$ $p_i = P(\{i\}) = i\lambda$

si $i=1$ $p_1 = \lambda$ $\Rightarrow p_i = i\, p_1$ pour $i \in [\![1,6]\!]$

or $\sum_{i=1}^{6} p_i = 1 \Rightarrow p_1 = \frac{1}{21}$ $\left(\begin{array}{l} p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6 = 1 \\ p_1(1+2+3+4+5+6) = 1 \end{array} \right.$

dans ce cas. $P(A_1) = p_2+p_4+p_6 = 2 \cdot \frac{1}{21} + 4 \cdot \frac{1}{21} + 6 \cdot \frac{1}{21} = (2+4+6) \cdot \frac{1}{21}$

$= \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$

• $P(A_2) = p_4+p_5+p_6 = 4 \cdot \frac{1}{21} + 5 \cdot \frac{1}{21} + 6 \cdot \frac{1}{21} = (4+5+6) \cdot \frac{1}{21}$

$= \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$

A_1 et A_2 n'ont pas les mêmes probabilités.

__Probabilités conditionnelles__ :

1/ __Introduction__ on lance une fois un dé cubique parfait dont les faces sont numérotés de 1 à 6. soit A l'événement : " on obtient un nombre inférieur ou égal à 5 " et B l'événement : " on obtient un nombre supérieur ou égal à 3 ".

Supposons qu'on sache que A est réalisé. Le résultat (5)
du lancer est donc un élément $w \in \{1,2,3,4,5,6\}$ et il y a
5 cas possibles pour l'événement A. B est réalisé ssi $w \in$
$\{3,4,5\}$ (B est réalisé ssi $A \cap B$ est réalisé) il y a donc 3 cas
favorables pour que B soit réalisé.
La probabilité que B soit réalisé sachant A est est donc $\frac{3}{5}$
et on a cette Proba $= \frac{\text{nbre cas favorable de } A \cap B}{\text{nombre de cas possible pour } A} =$

$$\frac{\text{card } A \cap B}{\text{card } A} = \frac{\frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card } \Omega}}{\frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

vérification $P(A) = \frac{5}{6}$; $P(A \cap B) = \frac{3}{6}$ et $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{3}{5}$.

2/ Probabilité conditionnelle:

Déf Si A et B sont des événements de l'espace probabilisé $(\Omega, P(\Omega))$ et si $P(A) \neq 0$, on appelle probabilité de B sachant A le réel noté $P_A(B)$ ou $P(B|A)$ défini par

$$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Th: pour tout événement A de l'espace probabilisé $(\Omega, P(\Omega), P)$ vérifiant $P(A) \neq 0$ l'application:

$$P_A : P(\Omega) \to [0,1]$$
$$B \mapsto P_A(B)$$

est une Probabilité sur Ω

appelée conditionnelle à A ou probabilité sachant A.

3/ Formule des Probabilités composées:

Th: 1/ soit A, B 2 événements tq $P(A) \neq 0$ alors on a:

$$P(A \cap B) = P(A)\, P_A(B)$$

2/ soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'événements tq $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$

alors $P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)\, P_{A_1}(A_2)\, P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots P_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)$.

Preuve: pour tout k compris entre 1 et $n-1$ on a:

$$A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} \subset A_1 \cap \dots \cap A_k \Rightarrow P(A_1 \cap \dots \cap A_k) \geq P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$$

donc toutes les probabilités conditionnelles sont définies.

$$P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n) = P(A_1) \prod_{k=2}^{n} P_{A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}}(A_k) = P(A_1) \prod_{k=2}^{n} \frac{P(A_1 \cap \dots \cap A_{k-1} \cap A_k)}{P(A_1 \cap \dots \cap A_{k-1})}$$

$$= P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n)$$

car tous les termes se simplifient 2 à 2 à part le dernier.

exemple classique: on effectue des tirages successifs dans une urne, la composition de l'urne étant modifiée à l'issue de chaque tirage (en particulier lorsque les tirages sont effectués sans remise).

par exemple: une urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires. on tire successivement 3 boules sans remise. quelle est la probabilité d'obtenir les 3 boules blanches?

soit B_k (resp. N_k) l'événement: "le $k^{\text{ème}}$ tirage donne une boule blanche (resp. noire)".

soit A l'événement: " on obtient 3 boules blanches", $A = B_1 \cap B_2 \cap B_3$

$P(A) = P(B_1) P_{B_1}(B_2) P_{B_1 \cap B_2}(B_3)$. $P(B_1) = \frac{3}{10}$ car l'urne contient 10 boules dont 3 blanches.

à l'issue du 1er tirage, l'urne contient 9 boules et si la première boule tirée est blanche, il ne reste que 2 boules blanches donc

$P_{B_1}(B_2) = \frac{2}{9}$, à l'issue du 2e tirage, l'urne contient 8 boules dont une seule blanche si l'on sait que les 2 premières boules tirées étaient blanche donc $P_{B_1 \cap B_2}(B_3) = \frac{1}{8}$ d'où

$$P(A) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{120}$$

4°/ Formule des Probabilités totales:

Th: soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complets d'événements ($\forall i, j \in I$ $i \neq j$ $A_i \cap A_j = \emptyset$ et $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$) de probabilités non nulles. $\forall B \in \mathcal{E}$

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(A_i \cap B) = \sum_{i \in I} P(A_i) P_{A_i}(B)$$

Preuve : $B = \Omega \cap B = \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B)$; les $(A_i \cap B)$ sont 2 à 2 disjoints donc $P(B) = \sum_{i\in I} P(A_i \cap B)$

de plus $P(A_i \cap B) = P(A_i)\, P_{A_i}(B)$ d'où $P(B) = \sum_{i\in I} P(A_i)\, P_{A_i}(B)$.

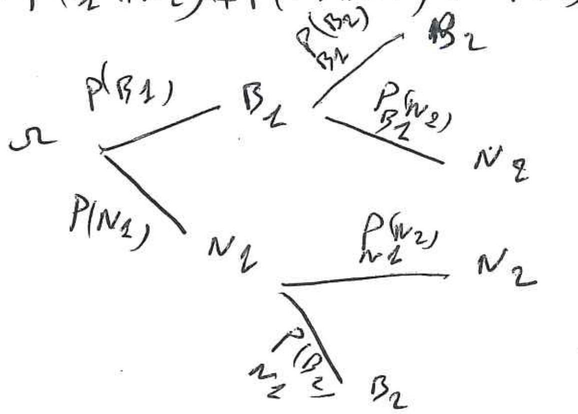
Rq cette formule des probabilités totales, qui est d'une grande importance, doit être utilisée en particulier quand l'expérience se déroule en plusieurs étapes et que la première aboutit à plusieurs résultats incompatibles entre eux et donnant un système complets d'événements.

exemple on reprend l'exemple précédent avec ses notations et cherchons la probabilité d'obtenir une boule noire au 2e tirage. Le 1er tirage a donné soit une boule blanche, soit une boule noire,

on a $N_2 = (B_1 \cup N_1) \cap N_2 = (B_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap N_2)$

$\Rightarrow P(N_2) = P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap N_2) = P(B_1)\, P_{B_1}(N_2) + P(N_1)\, P_{N_1}(N_2)$

ou bien



$P(N_2) = P(B_1)\, P_{B_1}(N_2) + P(N_1)\, P_{N_1}(N_2)$

or $P(B_1) = \frac{3}{10}$; $P(N_1) = \frac{7}{10}$

à l'issue du 1er tirage, l'urne ne contient plus que 9 boules dont 7 noires si B_1 a été réalisé et 6 noires si c'est N_1 qui a été réalisé.

donc $P_{B_1}(N_2) = \frac{7}{9}$ et $P_{N_1}(N_2) = \frac{6}{9}$

finalement $P(N_2) = \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} + \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{7}{10}$

5°) Formule de Bayes :

Th Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles et B un événement de probabilité non nulle.

Pour tout $i \in I$ $\quad P_B(A_i) = \dfrac{P(A_i)\, P_{A_i}(B)}{\sum_{j \in I} P(A_j)\, P_{A_j}(B)}$

Preuve : $P_B(A_i) = \dfrac{P(B \cap A_i)}{P(B)}$; or $P(B \cap A_i) = P(A_i)\, P_{A_i}(B)$

et $P(B) = \sum_{j \in I} P(A_j)\, P_{A_j}(B)$

d'où $P_B(A_i) = \dfrac{P(A_i)\, P_{A_i}(B)}{\sum_{j \in I} P(A_j)\, P_{A_j}(B)}$

exemple on reprend l'exemple précédent et effectuons 2 tirages. Le second tirage ayant donné une boule blanche, quelle est la probabilité que la 1ère boule tirée ait été blanche ?

Rq la formule de Bayes permet en quelque sorte de "remonter le temps"

ici on cherche $P_{B_2}(B_1)$

$$P_{B_2}(B_1) = \frac{P(B_2 \cap B_1)}{P(B_2)} = \frac{P(B_1)\, P_{B_1}(B_2)}{P(B_1)\, P_{B_1}(B_2) + P(N_1)\, P_{N_1}(B_2)} = \frac{\frac{3}{10} \times \frac{2}{9}}{\frac{3}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{7}{10} \times \frac{3}{9}} = \frac{2}{9}$$

Indépendance en Probabilité :

1/ indépendance de 2 événements :

Déf 2 événements A et B de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ sont dits indépendants si $P(A \cap B) = P(A)\, P(B) \Rightarrow P_A(B) = P(B)$ et $P_B(A) = P(A)$

Prop si A et B sont 2 événements indépendants pour la probabilité P, alors A et $\bar{B}$, $\bar{A}$ et B, $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indep.

Preuve : $P(A \cap \bar{B}) = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B)$ (7)
$= P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\bar{B}) \Rightarrow A$ et $\bar{B}$ sont indépendants, de même $\bar{A}$ et B sont indépendants et $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants en impliquant ce qui vient d'être démontré à $\bar{A}$ et B.

2./ Indépendance d'une famille d'événements

Déf 1 Des événements $A_1, \dots, A_n$ de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ sont dits 2 à 2 indépendants si pour tout couple (i,j) $i \neq j$ de $[\![1, n]\!]^2$ on a $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) P(A_j)$

Déf 2 des événements $A_1, \dots, A_n$ de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ sont dits mutuellement indépendants (ou simplement indépendants) si pour tout sous-ensemble non vide I de $[\![1, n]\!]$, on a :

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i).$$

Rq si les événements $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants alors ils sont 2 à 2 indep. mais la réciproque est fausse.

Variables aléatoires réelles discrètes

Généralité soit e une expérience aléatoire et Ω l'univers des résultats ~~obtenus~~ possibles associés à e. Il est parfois intéressant d'associer à chaque $\omega \in \Omega$ un nombre réel, par exemple le numéro obtenu lorsqu'on jette un dé. On est donc amené à étudier des applications de Ω dans $\mathbb{R}$ qui, sous certaines conditions sont appelés variables aléatoires réelle et notés en abrégé V.A.R

1. Variables discrètes

Déf soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable. On appelle variable aléatoire réelle V.A.R discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$

toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$ tq :
1/ $X(\Omega) = \{x_j / j \in J\}$ où J est une partie de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$
2/ pour tout $x \in X(\Omega)$; $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{P}(\Omega)$.

- $X(\Omega)$ est l'ensemble des valeurs prises par X.
- si J est fini, $X(\Omega)$ est un ensemble fini et on dit que X est une V.A.R discrète finie.
- sinon, on dit que X est une V.A.R. discrète infinie.

exemple on tire au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes.
Ω est l'ensemble des 52 cartes, à chaque carte $w \in \Omega$, on associe $X(w)$ défini par :

- $X(w) = 4$ si w est un as
- $X(w) = 3$ si w est un roi
- $X(w) = 2$ si w est une dame.
- $X(w) = 1$ si w est un valet.
- $X(w) = 0$ dans tous les autres cas.

on définit ainsi une V.A.R discrète finie définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.
X prend les valeurs 0, 1, 2, 3 et 4 $\Rightarrow X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Notations
- $X^{-1}(I) = \{w \in \Omega / X(w) \in I$; I intervalle de $\mathbb{R}\}$ est noté $[X \in I]$.
- $X^{-1}(\{x\}) = \{w \in \Omega / X(w) = x\}$ est noté $[X = x]$
- $X^{-1}(]-\infty, x])$ est noté $[X \leq x]$
- $X^{-1}(]a, b])$ est noté $[a < X \leq b]$.

2/ système complet associé à une V.A.R. discrète :

Prop soit X une V.A.R. discrète tq $X(\Omega) = \{x_i / i \in I\}$. $([X = x_i])_{i \in I}$ est un système complet d'événements appelé système complet associé à la V.A.R. X.

Preuve: $\forall i, j \in I$ tq $i \neq j$ $[X = x_i] \cap [X = x_j] = \phi$ et $\bigcup_{j \in I} [X = x_j] = \Omega$

-car :

- on a $\bigcup_{i\in I}[X=x_i] \subset \Omega$
- $\forall \omega \in \Omega$, il existe $j\in I$ tq $X(\omega)=x_j \Rightarrow \omega \in [X=x_j]$ et $\omega \in \bigcup_{j\in I}[X=x_j] \Rightarrow \Omega \subset \bigcup_{j\in I}[X=x_j] \Rightarrow \Omega = \bigcup_{j\in I}[X=x_j]$.

Loi et fonction de répartition d'une V.A.R. discrète:

$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé. X une V.A.R. discrète définie sur Ω. $X(\Omega)=\{x_i \,/\, i\in I\}$ avec I partie de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$.

1.1 Loi de Probabilité d'une V.A.R. discrète:

Def on appelle loi de probabilité de la V.A.R. discrete X (ou loi de X ou distribution de X) l'ensemble des couples (x_i, p_i) où $x_i \in X(\Omega)$ et $p_i = P([X=x_i])$.

Pour alléger les notations $P([X=x_i])$ sera noté $P(X=x_i)$.

En pratique: Pour determiner la loi de X, on détermine les valeurs x_i susceptibles d'être prises par X, puis les probabilités $p_i = P(X=x_i)$.

si $I=[1,n]$ avec n petit, on présente souvent les résultats dans un tableau

Exemple on choisit au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes. Ω est l'ensemble des 52 cartes. on considère l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ et P la probabilité uniforme sur Ω (toutes les cartes ont la même Probabilité d'être tirées). A chaque carte $\omega \in \Omega$, on associe le réel $X(\omega)$ défini par:

- $X(\omega)=4$ si ω est un as
- $X(\omega)=3$ si ω est un roi
- $X(\omega)=2$ si ω est une dame
- $X(\omega)=1$ si ω est un valet
- $X(\omega)=0$ dans tous les autres cas.

X est une V.A.R discrète finie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ qui prend les valeurs 0, 1, 2, 3 et 4; il y a 4 figures de chaque sorte et 36 cartes qui ne sont pas des figures.

d'où $P(X=0)=\frac{36}{52}=\frac{9}{13}$; $P(X=i)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$ pour $i\in[1,4]$.

d'où la loi de X

i	0	1	2	3	4
$P(X=i)=p_i$	$\frac{9}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{13}$

Th: soit $\{(x_i, p_i)/i\in I\}$ une partie de $\mathbb{R}^2$ tq I soit une partie de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ tq x_i soient 2 à 2 distincts.
$\{(x_i,p_i)/i\in I\}$ est une loi de Probabilité d'une V.A.R. discrète si
$$\begin{cases} p_i\geq 0 \quad \forall i\in I \\ \sum_{i\in I} p_i = 1 \end{cases}$$

exemple $\left\{\left(3^k, \frac{2}{3^{k+1}}\right)/k\in\mathbb{N}\right\}$ définit la loi de Probabilité d'une V.A.R discrète X car $\forall k\in\mathbb{N}$, $\frac{2}{3^{k+1}}\geq 0$ et
$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{2}{3^{k+1}}=\frac{2}{3}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{3^k}=\frac{2}{3}\,\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=1.$$

2) fonction de répartition d'une V.A.R. discrète:

Def soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé; soit X une V.A.R discrète. on appelle fonction de répartition de X l'application:
$$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto F(x)=P(X\leq x).$$

exemple reprenons l'exemple des cartes.
La fonction de répartition de X est définie par:

$\forall x\in\,]-\infty,0[\quad F(x)=0$

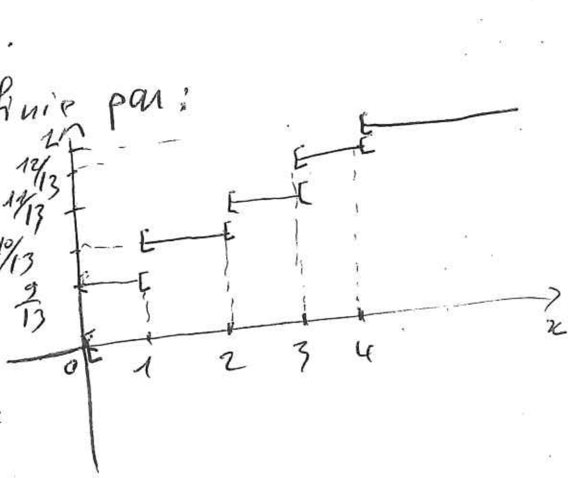
$\forall x\in[0,1[\quad F(x)=p_0=\frac{9}{13}$

$\forall x\in[1,2[\quad F(x)=p_0+p_1=\frac{10}{13}$

$\forall x\in[2,3[\quad F(x)=p_0+p_1+p_2=\frac{11}{13}$

$\forall x\in[3,4[\quad F(x)=p_0+p_1+p_2+p_3=\frac{12}{13}$

$\forall x\in[4,+\infty[\quad F(x)=1$



Prop 1/ $\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) \in [0,1]$

2/ F est croissante sur $\mathbb{R}$

3/ $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$ et F est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.

4/ $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.

Preuve: 1/ $\forall x \in \mathbb{R} \quad [X \leq x] \in \mathcal{P}(\Omega) \Rightarrow F(x) = P(X \leq x) \in [0,1]$.

2/ $\forall x, x' \in \mathbb{R}$ si $x \leq x'$ alors $[X \leq x] \subset [X \leq x']$ d'où

$P(X \leq x) \leq P(X \leq x')$ c.a.d $F(x) \leq F(x')$ donc F est croissante sur $\mathbb{R}$

4/ $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad [a < X \leq b] = [X \leq b] - [X \leq a]$ d'où

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P([X \leq b] \cap [X \leq a]) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$$
$$= F(b) - F(a).$$

Th: caractérisation d'une V.A.R. discrète à l'aide de sa fonction de répartition

si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ alors

. $P(X = x_1) = F(x_1)$

. $\forall i \in [\![2, n]\!] \quad P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$

Rq Il est parfois plus simple de déterminer la loi d'une V.A.R. à partir de sa fonction de répartition.

exemple un sac contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On tire 2 boules avec remise. On note X_1 le numéro de la $1^{ère}$ boule, X_2 le numéro de la $2^{ème}$ boule et Y le plus grand des 2 numéros obtenus. Déterminer la loi de Y. Y prend les valeurs 1, 2, 3 et 4. Soit F la fonction de répartition de Y.

. $F(1) = P(Y = 1) = P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = P(X_1 = 1)\, P(X_2 = 1)$ car les événements $[X_1 = 1]$ et $[X_2 = 1]$ sont indépendants puisque les tirages sont faits en remettant les boules donc $F(1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$.

. $F(2) = P(Y \leq 2) = P([X_1 \leq 2] \cap [X_2 \leq 2]) = P(X_1 \leq 2)\, P(X_2 \leq 2)$

or $[X_1 \leq 2] = [X_1 = 1] \cup [X_1 = 2] \Rightarrow F(2) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

- $F(3) = P(Y \leq 3) = P([X_1 \leq 3] \cap [X_2 \leq 3]) = P(X_1 \leq 3) \cdot P(X_2 \leq 3)$
$= \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$
- $F(4) = P(Y \leq 4) = P([X_1 \leq 4] \cap [X_2 \leq 4]) = P(X_1 \leq 4)\, P(X_2 \leq 4)$
$= \frac{4}{4} \cdot \frac{4}{4} = 1.$

on en déduit la loi de Y.
$P(Y=1) = F(1) = \frac{1}{16}$; $P(Y=2) = F(2) - F(1) = \frac{3}{16}$; $P(Y=3) = F(3) - F(2) = \frac{5}{16}$

et $P(Y=4) = F(4) - F(3) = \frac{7}{16}$.

3) Loi d'une fonction d'une V.A.R discrète :

soit X une V.A.R. discrète et soit g une fonction numérique définie sur $X(\Omega)$. $g \circ X$ est l'application $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\omega \mapsto g(X(\omega))$.

$g \circ X$ est aussi noté $g(X)$ et $\forall \omega \in \Omega$ $g(X)(\omega) = g([X(\omega)])$.

Prop soit X une V.A.R. discrète tq $X(\Omega) = \{x_i \,/\, i \in I\}$ et $Y = g(X)$.

$$\begin{cases} Y \text{ est une V.A.R. discrète finie définie sur } \Omega \text{ et tq :} \\ Y(\Omega) = \{y \in \mathbb{R} \,/\, \exists i \in I \text{ tq } y = g(x_i)\} \\ \forall y \in Y(\Omega) \,;\; P(Y=y) = \sum_{i / g(x_i) = y} P(X = x_i) \end{cases}$$

exemple soit X une V.A.R dont la loi est définie par :

x_i	-1	1	2
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Determiner la loi de $Y = 2X+1$ et $Z = X^2$

- Y prend les valeurs $-1, 3$ et 5 puis $P(Y=-1) = P(X=-1) = \frac{1}{4}$.
$P(Y=3) = P(X=1) = \frac{1}{2}$ et $P(Y=5) = P(X=2) = \frac{1}{4}$.
- Z prend les valeurs 1 et 4 puis $P(Z=1) = P(X=-1 \text{ ou } X=1) = P(X=-1) + P(X=1)$
$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ et $P(Z=4) = P(X=2) = \frac{1}{4}$

Moments d'une V.A.R. discrète :

soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et X une V.A.R. discrète définie sur Ω. On pose $p_i = P(X = x_i)$ pour $i \in I$
$X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ avec I une partie de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$.

1/ Espérance :

La moyenne des valeurs $X(\omega)$ est $m = \frac{\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)}{\text{card}\, \Omega}$; si P est définie par l'équiprobabilité alors $\forall \omega \in \Omega$ $P(\{\omega\}) = \frac{1}{\text{card}\, \Omega}$ d'où
$m = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$; si P est une probabilité quelconque alors
$\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$ est la moyenne des valeurs $X(\omega)$ pondérées par les probabilités des événements $\{\omega\}$. En calcul des probabilités, cette moyenne est appelée espérance de X et notée $E(X)$.

Déf On dit que X admet une espérance lorsque la série $\sum_{i \in I} x_i p_i$ est absolument convergente. On appelle alors espérance de X le réel $E(X) = \sum_{i \in I} x_i P(X = x_i)$.

2/ Espérance d'une fonction d'une V.A.R

soit g une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Th. de transfert : si I est fini ou si la série $\sum_i g(x_i) P(X = x_i)$ converge absolument, alors la V.A.R. $g(X)$ admet une espérance et on a
$E(g(X)) = \sum_{i \in I} g(x_i) P(X = x_i)$

exemple soit X une V.A.R dont la loi est :

x_i	-1	1	2
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

alors $\cdot\ E(X) = -1\, P(X=-1) + 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2)$
$= -1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

$\cdot\ E(X^2) = (-1)^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

Prop si X admet une espérance, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $aX+b$ admet une espérance et on a $E(aX+b) = a\,E(X) + b$.

Preuve: posons $g(x) = ax+b$ et $Y = aX+b = g(X)$

d'où $E(aX+b) = E(g(X)) = \sum_{i\in I} g(x_i)\, P(X=x_i) = \sum_{i\in I} (ax_i+b)\, p_i$

$= a \sum_{i\in I} x_i p_i + b \sum_{i\in I} p_i = a\,E(X) + b$

3) **Variance:**

Déf on dit que X admet une variance lorsque $E\left((X-E(X))^2\right)$ existe.
on appelle variance de X le réel $V(X) = E\left((X-E(X))^2\right)$ et ecart type de X le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Th: si X^2 admet une espérance, alors X admet une variance et on a $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Preuve posons $Y = (X-E(X))^2 = (X-m)^2$ où $m = E(X)$
$= g(X)$ où $g(x) = (x-m)^2$

$V(X) = E(Y) = \sum_{i\in I} g(x_i)\, P(X=x_i) = \sum_{i\in I} (x_i-m)^2 p_i = \sum_{i\in I} (x_i^2 - 2mx_i + m^2) p_i$

$= \sum_{i\in I} x_i^2 p_i - 2m \sum_{i\in I} x_i p_i + m^2 \sum_{i\in I} p_i$

$= E(X^2) - 2m\,E(X) + m^2 = E(X^2) - 2(E(X))^2 + (E(X))^2$

$\Rightarrow V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Prop si X admet une variance, alors $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $aX+b$ admet une variance et $V(aX+b) = a^2 V(X)$

Preuve soit $Y = aX+b$

on a $E(Y) = a E(X) + b \Rightarrow \left(Y - E(Y)\right)^2 = a^2 \left(X - E(X)\right)^2$

or $V(Y) = E\left(Y - E(Y)\right)^2 = a^2 E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = a^2 V(X)$.

c-à-d $V(aX+b) = a^2 V(X)$.

Déf. • si X admet une espérance égale à 0, on dit que X est une variable centrée.

• si X admet une variance égale à 1, on dit que X est une variable réduite.

• si X est une V.A.R alors $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est une variable centrée réduite associée à X.

lois discrètes finies

1/ loi de Bernoulli :

schéma théorique : on considère une épreuve aléatoire e et un événement A lié à e de probabilité p. on effectue une fois e.

soit X la V.A.R. définie par $\begin{cases} X = 1 & \text{si } A \text{ est réalisé} \\ X = 0 & \text{si } A \text{ n'est pas réalisé}, \end{cases}$

on dit que X est une variable de Bernoulli.

loi de X

k	0	1
$P(X=k)$	$1-p$	p

Déf soit $p \in [0,1]$. on dit qu'une ~~variable~~ V.A.R. X suit la loi de Bernoulli de paramètre p et on note $X \hookrightarrow B(1,p)$ lorsque X prend les valeurs 0 et 1 avec $P(X=0) = 1-p$ et $P(X=1) = p$.

Prop si X suit la loi de Bernoulli de paramètre p alors
$E(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$

Preuve : $E(X) = 0 . P(X=0) + 1 . P(X=1) = p$.
$E(X^2) = 0^2 P(X=0) + 1^2 P(X=1) = p$

donc $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = p - p^2 = p(1-p)$.

2-/ loi binomiale

schéma théoriques: on considère une épreuve aléatoire e et un événement A lié à e de probabilité p. On effectue n fois e dans des conditions identiques (p est constant et les épreuves sont indépendants). Soit X le nombre de réalisations de A au cours des n épreuves.

loi de X: X prend les valeurs $0, 1, \dots, n$.

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Def soit $p \in [0,1]$; on dit qu'une V.A.R. suit la loi de Binomiale de taille n et de paramètre p, notée $B(n,p)$ lorsque X prend les valeurs $0, 1, \dots, n$ avec les probabilités $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Prop si X suit la loi Binomiale $B(n,p)$ alors

$E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

Preuves: $E(X) = \sum_{k=0}^{n} k P(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

or pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ donc

$$E(X) = n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)}$$

$k' = k-1$

$$= np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} = np\,(p + (1-p))^{n-1} = np.$$

$E(X^2)$ voir fin page 12

3-/ loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$:

Def soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une V.A.R. X suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ lorsque X prend les valeurs $1, 2, \dots, n$ avec les probabilités $P(X=k) = \frac{1}{n}$.

Prop si X suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ alors $E(X) = \frac{n+1}{2}$

et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

Preuve : $E(X) = \sum_{k=1}^{n} k\, P(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$ (12)

- $E(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 P(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$

d'où $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2-1}{12}$.

Loi discrètes infinis

1/ Loi géométrique

schéma théorique : on considère une épreuve aléatoire e et un événement A lié à e de probabilité p ($p \in]0,1[$). On répète l'épreuve e dans des conditions identiques (p est constant et les épreuves sont indépendants). Soit X le nombre d'épreuves effectués jusqu'à ce que A soit réalisé pour la première fois. On dit que X est le temps d'attente du premier événement A.

Loi de X : X prend les valeurs $1, \dots, n, \dots = \mathbb{N}^*$

$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$

Déf : soit $p \in]0,1[$. On dit que une V.A.R. X suit la loi géométrique de paramètre p, noté $\mathcal{G}(p)$ lorsque X prend les valeurs $n \in \mathbb{N}^*$ avec les probabilité $P(X=n) = p(1-p)^{n-1}$.

Prop : si X suit la loi géométrique de paramètre p, X admet une espérance mathématique : $E(X) = \frac{1}{p}$ et une variance $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Preuve : $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, P(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, p(1-p)^{n-1} = p \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} =$

$p \frac{1}{[1-(1-p)]^2} = \frac{1}{p}$. $\quad \left| \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \; ; \; \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \\ \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3} \end{array} \right.$

$$E(X^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 p(1-p)^{n-1} = \dots = \frac{2-p}{p^2}$$

$$\text{d'où } V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

2°) Loi de Poisson

Déf Soit $\lambda > 0$. On dit qu'une v.a.r. X suit la loi de Poisson de paramètre λ notée $\mathcal{P}(\lambda)$ lorsque X prend les valeurs $n \in \mathbb{N}$ avec les probabilités $P(X=n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$

Prop Si X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ alors
$E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$.

Preuves $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n P(X=n) = \sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$

$$= e^{-\lambda}\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} = \lambda.$$

$$E(X^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 P(X=n) = \cancel{\sum_{n=2}^{+\infty} n^2 P(X=n) + P(X=1)} \sum_{n=0}^{+\infty} (n(n-1)+n) P(X=n)$$

$$= \cancel{e^{-\lambda} \sum_{n=2}^{+\infty} n^2 \frac{\lambda^n}{n!}} + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) P(X=n) + \sum_{n=0}^{+\infty} n P(X=n)$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} + E(X) = e^{-\lambda}\lambda^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} + \lambda$$

$$= e^{-\lambda}\lambda^2 e^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda$$

$$\text{d'où } V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

— — — —

$k^2 = k(k-1) + k$

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 P(X=k) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) P(X=k) + \sum_{k=1}^{n} k P(X=k)$$

$$= \sum_{k=2}^{n} k(k-1) C_n^k p^k (1-p)^{n-k} + E(X) = \sum_{k=2}^{n} n(n-1) C_{n-2}^{k-2} p^k (1-p)^{n-k} + E(X) \text{ car}$$

pour $k \geq 2$ $k(k-1) C_n^k = n(n-1) C_{n-2}^{k-2}$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{k'=0}^{n-2} C_{n-2}^{k'} p^{k'} (1-p)^{n-2-k'} + E(X) = n(n-1)p^2 [p + (1-p)]^{n-2} + np$$

$k' = k-2$ $$= n(n-1)p^2 + np$$

$$\Rightarrow V(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = -np^2 + np = np(1-p)$$