Probabilités 1. Chapitre I : Espace probabilisé

Naâmane LAIB

26 septembre 2016

But de calcul des probabilités

Un des objectifs du calcul des probabilités est l'étude des **phénomènes aléatoires et des lois qui les régissent**.

Pour modéliser ces phénomènes et préciser le cadre d'étude, nous avons besoin de définir les objets suivants :

- un ensemble Ω (**univers**)
- une certaine classe de parties de Ω (**tribu**)
- et une fonction définie sur cette classe (**mesure de probabilité**).

Expérience aléatoire (phénomène aléatoire)

Definition

Une **expérience** est qualifiée d'**aléatoire** si :

- on ne peut **prévoir** par avance son résultat
- et si répétée dans des conditions identiques, ne donne pas à chaque essai le même résultat.
  Elle est notée $\mathcal{E}$.

Espace échantillon : Ω

Definition

L'ensemble de tous les résultats possibles associé à l'expérience est appelé **espace échantillon** ou **univers** ou **espace fondamental**. Il est noté Ω.

Les éléments de Ω sont : les résultats possibles de l'expérience appelés événements élémentaires ou épreuves notés ω, $\omega \in \Omega$.

Remarque. Ω peut être :

- fini
- infini dénombrable ($\Omega = \mathbb{N}$)
- infini non dénombrable ($\Omega = \mathbb{R}$)

Exemples

- On lance une pièce : $\Omega = \{P, F\}$.
- On lance un dé : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- On lance deux dés : $\Omega = \{(i, j) \mid (i, j) \in [|1, 6|]^2\}$.
- Le nombre d'appels arrivant dans un centre téléphonique pendant une journée : Ω

Exemples

- On lance une pièce : $\Omega = \{P, F\}$.
- On lance un dé : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- On lance deux dés : $\Omega = \{(i, j) \,|(i, j) \in [|1, 6|]^2\}$.
- Le nombre d'appels arrivant dans un centre téléphonique pendant une journée : $\Omega = \mathbb{N}$.
- la durée de vie d'une bactérie : Ω

Exemples

- On lance une pièce : $\Omega = \{P, F\}$.
- On lance un dé : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- On lance deux dés : $\Omega = \{(i, j) \mid (i, j) \in [|1, 6|]^2\}$.
- Le nombre d'appels arrivant dans un centre téléphonique pendant une journée : $\Omega = \mathbb{N}$.
- la durée de vie d'une bactérie : $\Omega = [0, +\infty[$.
- la durée d'une communication téléphonique : $\Omega = [0, +\infty[$.

Événements aléatoires

Définition

On appelle événement aléatoire tout **sous-ensemble** $A \subset \Omega$ dont on peut dire au vu de l'expérience s'il est réalisé ou non.

Exemples

- L'événement : "le résultat du lancer de dé est pair" est représenté par l'ensemble : $A = \{2, 4, 6\}$.

Événements aléatoires

Définition

On appelle événement aléatoire tout **sous-ensemble** $A \subset \Omega$ dont on peut dire au vu de l'expérience s'il est réalisé ou non.

Exemples

- L'événement : "le résultat du lancer de dé est pair" est représenté par l'ensemble : $A = \{2, 4, 6\}$.
- L'événement : "le nombre d'appels reçus est inférieur à 3" est représenté par l'ensemble : $A = \{0, 1, 2, 3\}$.

Événements aléatoires

Définition

On appelle événement aléatoire tout **sous-ensemble** $A \subset \Omega$ dont on peut dire au vu de l'expérience s'il est réalisé ou non.

Exemples

- L'événement : "le résultat du lancer de dé est pair" est représenté par l'ensemble : $A = \{2, 4, 6\}$.
- L'événement : "le nombre d'appels reçus est inférieur à 3" est représenté par l'ensemble : $A = \{0, 1, 2, 3\}$.
- L'événement : " la durée d'une communication téléphonique est supérieure à 3 minutes " est représentée par : $A = [3, +\infty[$.

Événements aléatoires

Définition

On appelle événement aléatoire tout **sous-ensemble** $A \subset \Omega$ dont on peut dire au vu de l'expérience s'il est réalisé ou non.

Exemples

- L'événement : "le résultat du lancer de dé est pair" est représenté par l'ensemble : $A = \{2, 4, 6\}$.
- L'événement : "le nombre d'appels reçus est inférieur à 3" est représenté par l'ensemble : $A = \{0, 1, 2, 3\}$.
- L'événement : " la durée d'une communication téléphonique est supérieure à 3 minutes " est représentée par : $A = [3, +\infty[$.

Événements aléatoires

Événements mutuellement exclusifs (ou incompatibles).
Deux événements A et B sont mutuellement exclusifs quand leur intersection est vide : $A \cap B = \emptyset$.

Événements élémentaires :

- Ils sont représentés en général par $\{\omega\} \subset \Omega$.
- Ils sont par définition mutuellement exclusifs.
- Ils ne peuvent pas s'exprimer comme union d'autres événements de Ω.
- Ils constituent une partition de Ω : $\Omega = \bigcup_i \{\omega_i\}$ avec $\{\omega_i\} \cap \{\omega_j\} = \emptyset \; , i \neq j \quad \forall i, j$.

Événements et opérations sur les ensembles

Les opérations ensemblistes permettent de définir d'autres événements à partir de deux événements A et B,

- A n'est pas réalisé : ....
- A et B sont réalisés : ....
- A ou B sont réalisés : ....
- A réalisé $\Longrightarrow$ B réalisé : ....
- A et B sont incompatibles : ....
- Ω est l'événement certain (toujours vrai).
- $\emptyset$ est l'événement impossible (jamais vrai).

Algèbre des événements

Rappel 1 : L'ensemble des parties de Ω, noté $\mathcal{P}(\Omega)$, est l'ensemble de touts les sous-ensembles de Ω.
Exemple : $\Omega = \{a, b, c\}$

$$\Rightarrow \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}$$

Rappel 2 : Un événement est une partie de Ω.

Algèbre des événements

Rappel 1 : L'ensemble des parties de Ω, noté $\mathcal{P}(\Omega)$, est l'ensemble de touts les sous-ensembles de Ω.
Exemple : $\Omega = \{a, b, c\}$

$$\Rightarrow \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}$$

Rappel 2 : Un événement est une partie de Ω.

Algèbre des événements

Recherche d'une classe $\mathcal{A}$ constituée de **l'ensemble des événements intéressants** :

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$$

Algèbre des événements

Recherche d'une classe $\mathcal{A}$ constituée de **l'ensemble des événements intéressants** :

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$$

Comment choisir la classe $\mathcal{A}$ **?**

On remarque que si A et B sont **deux événements** (A et $B \in \mathcal{A}$) :

- $\overline{A}$ est aussi un événement.
- la réalisation simultanée de A et B est l'événement $A \cap B$.
- la réalisation de l'un au moins de A ou B est l'événement $A \cup B$.

Algèbre des événements

Il sera donc naturel d'exiger de $\mathcal{A}$ les propriétés suivantes :

$-\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$.

$-\forall A \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \forall B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad A \cup B \in \mathcal{A}$.

Tribu

Définition (Tribu)

Une **tribu** ou σ-**algèbre** sur Ω est une famille, $\mathcal{A}$, de sous-ensembles de Ω telle que :

1. $\Omega \in \mathcal{A}$.
2. $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$.
3. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

Tribu : Espace mesurable et Exemples

Espace mesurable :

$(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé espace **mesurable ou espace probabilisable**

Exemples de Tribus

- $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ est appelée tribu grossière.

Tribu : Espace mesurable et Exemples

Espace mesurable :

$(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé espace **mesurable ou espace probabilisable**

Exemples de Tribus

- $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ est appelée tribu grossière.
- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ tribu discrète.

Tribu : Espace mesurable et Exemples

Espace mesurable :

$(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé espace **mesurable ou espace probabilisable**

Exemples de Tribus

- $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ est appelée tribu grossière.
- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ tribu discrète.
- Si $A \subset \Omega, \quad \mathcal{A} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- Si $\Omega = \{a, b, c\}$ alors $\mathcal{A} = \{\varnothing, \{a\}, \{b, c, \}, \Omega\}$ (est la plus petite tribu contenant l'ensemble $\{a\}$).

La tribu de Borel : $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Definition

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble de parties de $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty; \infty\}$ suivant :

$\mathcal{D} = \{]a, b[: a, b \in \overline{\mathbb{R}}\} \equiv$ l'ensemble des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.

La tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la plus petite tribu engendrée par $\mathcal{D}$, c'est-à-dire $\mathcal{B}(\mathbb{R}) := \sigma(\mathcal{D})$.
Les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés des boréliens.

Remarque

- Si Ω est fini ou infini dénombrable, on choisit : $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$
- Si Ω est infini non dénombrable ($\Omega =$ intervalle de $\mathbb{R}$), $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
- On démontre que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Et on retiendra que l'on a pas toujours $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
  "on ne considère pas nécessairement tout sous-ensemble A de Ω comme un élément de la tribu $\mathcal{A}$ des événements".

Conséquences : Proposition

Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω. Alors

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$. Alors $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.
3. Soient A et B deux éléments de $\mathcal{A}$ vérifiant $A \subset B$. Alors $B \cap \overline{A} := B - A \in \mathcal{A}$
4. Soient A et B deux éléments de $\mathcal{A}$. Alors $A \triangle B \in \mathcal{A}$.

Démonstration de Proposition

1) $\overline{\emptyset} = \ldots\ldots\ldots$
2)

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \ldots\ldots\ldots \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}}$$

Comme $A_n \in \mathcal{A}$, on déduit que .... $\overline{A_n} \in \mathcal{A}$, d'après la propriété (ii) de la définition d'une tribu. La propriété (iii) permet alors d'écrire :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} \in \mathcal{A}.$$

Une nouvelle application de la propriété (ii) donne :.......

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}} \in \mathcal{A}$$

Démonstration de Proposition

1) $\overline{\emptyset} = \dots\dots\dots$
2)

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \dots\dots\dots \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}}$$

Comme $A_n \in \mathcal{A}$, on déduit que .... $\overline{A_n} \in \mathcal{A}$, d'après la propriété (ii) de la définition d'une tribu. La propriété (iii) permet alors d'écrire :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} \in \mathcal{A}.$$

Une nouvelle application de la propriété (ii) donne :.......

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}} \in \mathcal{A}$$

3) $B - A = \dots. B \cap \overline{A} \in \mathcal{A}.$

Loi de Probabilité (ou mesure de Probabilité)

Objectif : Munir l'espace $(\Omega, \mathcal{A})$ d'une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ afin de pouvoir calculer la probabilité de réalisation de n'importe quel événement lié à l'expérience aléatoire.

Loi de Probabilité (ou mesure de Probabilité)

Objectif : Munir l'espace $(\Omega, \mathcal{A})$ d'une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ afin de pouvoir calculer la probabilité de réalisation de n'importe quel événement lié à l'expérience aléatoire.

Définition

On appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ (ou loi de probabilité) toute application $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ telle que :

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
2. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable d'événements incompatibles de $\mathcal{A}$, alors : $\mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$.

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est alors appelé **espace probabilisé**.

Conséquences de la définition d'une probabilité : Théorème

Théorème

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
2. *Soient A et B deux événements incompatibles, alors* $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
3. *Soient $A_1, \ldots, A_n$, n événements deux à deux incompatibles*
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$
4. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
5. *Si* $A \subset B \Rightarrow \ \mathbb{P}(B \cap \overline{A}) := \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.
6. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Démonstration

1) Soit $A_1 = \Omega$ et $A_n = \emptyset, \ \forall n > 1$. On a
$\Omega = \bigcup_{n\geq 1} A_n$ avec $A_n \cap A_m = \emptyset \ (n \neq m) \Rightarrow$

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \ldots\ldots\mathbb{P}(\Omega) + \sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P}\left(A_n\right)$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(A_n\right)$ absolument Convergente
$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0 \quad \forall n \geq 2$ et donc $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

Démonstration (suite)

2) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $A_0 = A, A_1 = B$, $A_n = \emptyset$ pour $n \geq 2$. $A_n \cap A_m = \emptyset$ $(n \neq m)$, définition de $\mathbb{P}$ permet d'écrire :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

soit

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

Démonstration (suite)

3) Si $A_1, A_2 \ldots A_n$ sont deux à deux incompatibles, définir $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$B_0 = A_1, B_1 = A_2, \ldots, B_{n-1} = A_n, B_j = \emptyset \quad \text{pour} \quad j \geq n.$$

L'égalité

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=0}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(B_j)$$

donne

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(\emptyset).$$

Démonstration (suite)

4) En appliquant la relation précédente à A et $\overline{A}$, il vient

$$\mathbb{P}(\overline{A}) + \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\overline{A} \cup A) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

5) Montrons que $\mathbb{P}$ est croissante. soit $A \subset B$ et $C = B - A$,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C) \geq \mathbb{P}(A).$$

Posons $C = B - A$, A et C sont alors incompatibles, d'où

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A \cup C) = \mathbb{P}(A \cup (B - A)) = \mathbb{P}(B)$$

on conclut que $\mathbb{P}(B - A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.

Théorème des probabilités totales

Theorem

Soit $(B_i)_{i=1,\dots,n}$ un système complet d'événements, alors pour tout événement A, on a

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap B_i).$$

Idée. Remarquer $\Omega = \bigcup_i B_i$ avec $B_i \cap B_J = \emptyset, \ i \neq j$ et $A = A \cap \Omega$.

Formule de Poincaré ou du crible

Théorème

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left[\left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \ldots < i_k \leq n} \mathbb{P}\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \ldots \cap A_{i_k}\right) \right) \right]$$

Cas : $n = 3$. *Pour tout* $A, B, C \in \mathcal{A}$, *on a*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) \\ &- \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

événement négligeable

Definition

Un événement $A \in \mathcal{A}$ est dit négligeable si $\mathbb{P}(A) = 0$.
Un événement $A \in \mathcal{A}$ est dit presque sûr si $\mathbb{P}(A) = 1$.

Remarque.
$\mathbb{P}(A) = 0 \not\Rightarrow A = \emptyset$ et $\mathbb{P}(A) = 1 \not\Rightarrow$ A est certain

Construction d'un Espace de Probabilité discret $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

Étapes :

1. Déterminer l'espace des événements élémentaires (Espace échantillon) $\Omega = \bigcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\}$

Construction d'un Espace de Probabilité discret $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

Étapes :

1. Déterminer l'espace des événements élémentaires (Espace échantillon) $\Omega = \bigcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\}$
2. Construire la tribu des événements. Souvent on choisit $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Construction d'un Espace de Probabilité discret $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

Étapes :

1. Déterminer l'espace des événements élémentaires (Espace échantillon) $\Omega = \bigcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\}$
2. Construire la tribu des événements. Souvent on choisit $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
3. Se donner la mesure $\mathbb{P}$ vérifiant les trois points suivants :

Construction d'un Espace de Probabilité discret $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

Étapes :

1. Déterminer l'espace des événements élémentaires (Espace échantillon) $\Omega = \bigcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\}$
2. Construire la tribu des événements. Souvent on choisit $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
3. Se donner la mesure $\mathbb{P}$ vérifiant les trois points suivants :
   - $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
   - $\forall \omega \in \Omega,\ \mathbb{P}(\{\omega\}) \geq 0$
   - $$\mathbb{P}\left(\bigcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\}\right) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = 1$$
   - $$\forall A \in \mathcal{A}, \quad A \neq \emptyset, \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}).$$

Construction d'un Espace de Probabilité discret $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

Étapes :

1. Déterminer l'espace des événements élémentaires (Espace échantillon) $\Omega = \bigcup_{\omega\in\Omega}\{\omega\}$
2. Construire la tribu des événements. Souvent on choisit $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
3. Se donner la mesure $\mathbb{P}$ vérifiant les trois points suivants :
   - $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
   - $\forall\omega \in \Omega,\ \mathbb{P}(\{\omega\}) \geq 0$
   - $$\mathbb{P}\left(\bigcup_{\omega\in\Omega}\{\omega\}\right) = \sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(\{\omega\}) = 1$$
   - $$\forall A \in \mathcal{A}, \quad A \neq \emptyset, \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A}\mathbb{P}(\{\omega\}).$$

Probabilité Uniforme (ou équiprobabilité) sur Ω fini

Definition

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ un univers fini. On dit qu'il y a équiprobabilité si et seulement si

$$\forall (i,j) \in [|, 1, n|]^2 : \ \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \mathbb{P}(\{\omega_j\}).$$

Compte tenu de la relation : $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{\omega_k\}) = 1$, il vient

$$\forall k \in [|, 1, n|] : \ \mathbb{P}(\{\omega_k\}) = \frac{1}{n} = \frac{1}{Card(\Omega)}.$$

La probabilité $\mathbb{P}$ est appelée **probabilité uniforme** sur Ω.

Probabilité Uniforme (ou équiprobabilité) sur Ω fini

Si $A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_q}\}$ est un événement, alors

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{\omega_{i_1}\}) + \ldots + \mathbb{P}(\{\omega_{i_q}\}) = \frac{q}{n} \Rightarrow$$

Probabilité Uniforme (ou équiprobabilité) sur Ω fini

Si $A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_q}\}$ est un événement, alors

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{\omega_{i_1}\}) + \ldots + \mathbb{P}(\{\omega_{i_q}\}) = \frac{q}{n} \Rightarrow$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} \tag{1}$$

Le problème revient donc à dénombrer
-les événements élémentaires de Ω (cas possibles)
- et les événements élémentaires de A (cas favorables).

Probabilité sur Ω infini dénombrable

Soit $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n, \dots\}$, un univers dénombrable.
Une probabilité sur Ω est caractérisée par la donnée des probabilités des événements élémentaires $\{\omega_n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Les réels $p_n = \mathbb{P}(\{\omega_n\})$ vérifient les propriétés suivantes :

(i) $\forall n \in \mathbb{N} : p_n \geq 0$
(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$.
Si $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_q}, \dots\}$ est un événement, on obtient :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{i_k}.$$

Probabilité sur Ω infini dénombrable

L'hypothèse d'équiprobabilité ne peut être maintenue.
En effet, si tous les réels p_n sont égaux à 0, on trouve

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 0 \neq 1.$$

D'autre part, si $p_n = p > 0, (n \in \mathbb{N})$, la série de terme général p_n diverge.

Analyse combinatoire

L'étude des probabilités sur les **ensembles finis** se ramène à des problèmes de **dénombrement où il s'agit de compter les éléments de certains ensembles**.

But.- Dénombrer le nombre de **dispositions** qu'il est possible de former à partir d'un ensemble fini E non vide.

- La **distinction** entre dispositions basée sur **"notion d'ordre"**.
- **Ordre important** $\Rightarrow (x, y) \neq (y, x)$ (**Repérage** d'un point $M(x, y)$ dans le plan).
- **Ordre n'est pas important** $\Rightarrow \{x, y\} = \{y, x\}$

Deux ou plusieurs dispositions comportant les mêmes éléments seront **différentes s'il s'agit de dispositions ordonnées**,
et
identiques s'il s'agit de dispositions non ordonées.

Trois formes de dispositions doivent être distinguées

:

- Les **permutations** : *ordre*
- Les **arrangements** : *ordre*
- Les **combinaisons** : *pas d'ordre*

▷ Préciser la **méthode de tirage** :
remise- sans remis-exhaustif (simultané)

p- listes

Definition

E un ensemble fini, $Card(E) = n$ et $p \in \mathbb{N}$.
Une p-liste d'éléments de E est un élément de l'ensemble

$$E^p = E \times E \times \ldots \times E$$

(c'est-à-dire un p-uplet d'éléments de E
ou tout élément de la forme $(x_1, \ldots, x_p)$ où $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$, $x_i \in E$)).
Les éléments peuvent être répétés.

p- listes : Exemples

1) $E = \{a, b, c, d\}$, les triplets
$(a, c, a), \quad (c, a, b), \quad (b, a, c), \quad (d, d, d)$
sont 4 exemples de 3-listes d'éléments de E.

2) $E = \{0; 1\}$, alors
$(0, 0, 1, 0, 1)$ est une 5- liste d'éléments de E.

p- listes

Remarque.
2p-listes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sont identiques ssi

$$\forall i = 1, \ldots, n \quad x_i = y_i \quad \textbf{(éléments identiques et dans le même ordre)}$$

Théorème

Soit E un ensemble fini, $Card(E) = n$. Alors, le cardinal de l'ensemble des p-listes d'éléments de E est n^p. C'est-à-dire

$$Card(E^p) = n^p$$

Cas typique. On effectue p tirages successifs et avec remise d'une boule dans une urne contenant n boules : il y a n^p tirages différents possibles.

Arrangements sans répétition

E un ensemble fini, $Card(E) = n \geq 1$, et p un entier $(1 \leq p \leq n)$.

Definition

Un **arrangement sans répétition** de p éléments parmi n éléments de E est une p-**liste** d'éléments de E **deux à deux distincts**.

Arrangements sans répétition

E un ensemble fini, $Card(E) = n \geq 1$, et p un entier $(1 \leq p \leq n)$.

Definition

Un **arrangement sans répétition** de p éléments parmi n éléments de E est une p-**liste** d'éléments de E **deux à deux distincts**.

Théorème

Il y a

$$n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} := A_n^p$$

p-listes **sans répétition de** E.

Arrangements sans répétition

Remarques

- Un arrangement correspond à un choix ordonné de p éléments deux à deux distincts.
- Il n'existe aucun arrangements à p éléments de E, lorsque $p > n$.

Arrangements sans répétition

Remarques

- Un arrangement correspond à un choix ordonné de p éléments deux à deux distincts.
- Il n'existe aucun arrangements à p éléments de E, lorsque $p > n$.
- Lorsque $p = n$,
  $A_n^n = n!$=Nombre d'arrangements (ou de **permutations**) d'ordre n de E **sans répétition.**

Arrangements sans répétition : Exemples

1) $E = \{a, b, c, d\}$ alors

(c, a, b) et (b, a, c) sont deux arrangements différents de E.

(a, c, a) n'est pas un arrangement car l'élément a est répété

Exemple

On effectue p tirages successifs d'une boule sans remise dans une urne contenant n boules. Le nombre de tirages possibles est $A_n^p := n(n-1)...(n-p+1)$.

Exemple

Il y a 8 livres sur une étagère : combien de rangements sont possibles ?
Un rangement est une permutation des 8 livres donc il y a $8!$ *rangements possibles.*

Arrangements avec répétition (ou p-lites)

Choisissons :

- p **éléments** de E, en **répétant** éventuellement le même élément,
- plaçons les dans **un** p**-uplet**. **Résultat** est un

$$\mathbf{p} - \text{uplet}(\mathbf{x_{i_1}}, \dots, \mathbf{x_{i_p}}) \quad \text{d'éléments de } E.$$

Si E est fini de cardinal n, il y a

n^p : $p-$ arrangements (ou listes **avec répétition d'éléments de**) E

Combinaisons sans répétition

Definition

On appelle **combinaison sans répétition d'ordre p de E** toute partie à p éléments de E
(disposition non ordonnées et sans répétition de p éléments parmi n).
Il y a

$$\frac{A_n^p}{p!} := C_n^p := \binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!} \quad \text{combinaisons d'ordre } p \text{ de } E.$$

Remarques

- Une combinaison sans répétition correspond à un tirage simultané de p éléments parmi n

- Les éléments d'une combinaison de p éléments de E sont deux à deux distincts donc $0 \leq p \leq card(E)$.

- L'ordre des éléments d'une combinaison n'a pas d'importance.

- Si $E = \{1; \dots; 10\}$ alors $\{2; 5; 7\}(= \{5; 2; 7\} = \{7; 5; 2\} = ...)$ et $\{1; 8; 10\}$ sont des combinaisons à 3 éléments de E.

Exercices

Exercice

On tire au hasard un ensemble de **5 cartes** *dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité que la* **main contienne au moins un as** *?*

Ω=l'ensemble des mains de 5 cartes

$$\forall \omega \in \Omega,\ \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{C_{32}^{5}}.$$

A="la main contient au moins un as"

Exercices

Exercice

On tire au hasard un ensemble de **5 cartes** *dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité que la* **main contienne au moins un as** *?*

Ω=l'ensemble des mains de 5 cartes

$$\forall \omega \in \Omega,\ \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{C_{32}^5}.$$

A="la main contient au moins un as"

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \frac{C_{28}^5}{C_{32}^5} \qquad \text{et} \quad \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \frac{C_{28}^5}{C_{32}^5} \simeq 0.512$$

Exercices

Exercice

Une urne contient a **boules blanches-bB** *et b* **boules noires-bN**. *On extrait au hasard une poigné de n* **boules**. *Quelle est la probabilité que cette poignée contient k boules blanches ($k \leq n$).*

Ω= l'ensemble des boules (blanches et noires) et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Le "hasard" se traduit par "toutes les poignées sont équiprobales".

Exercices

Exercice

Une urne contient a **boules blanches-bB** *et b* **boules noires-bN**. *On extrait au hasard une poigné de n* **boules**. *Quelle est la probabilité que cette poignée contient k boules blanches ($k \leq n$).*

Ω= l'ensemble des boules (blanches et noires) et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Le "hasard" se traduit par "toutes les poignées sont équiprobales".

Il y a C_{a+b}^{n} poignées en tout, donc C_{a+b}^{n} cas possibles.

A_k="la poignée contient k boules blanches et $n-k$ boules noires"

Il y a en tout

Exercices

Exercice

Une urne contient a **boules blanches-bB** *et b* **boules noires-bN**. *On extrait au hasard une poigné de n* **boules**. *Quelle est la probabilité que cette poignée contient k boules blanches ($k \leq n$).*

Ω= l'ensemble des boules (blanches et noires) et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Le "hasard" se traduit par "toutes les poignées sont équiprobales".

Il y a C_{a+b}^{n} poignées en tout, donc C_{a+b}^{n} cas possibles.

A_k="la poignée contient k boules blanches et $n-k$ boules noires"
Il y a en tout

$C_a^k C_b^{n-k}$ poignées contenant k boules blanches et $n-k$ boules noires.

Exercices

Remarque.
Le système d'événements $(A_k)_{0\leq k\leq n}$ est un système complet (une poignée a nécessairement une composition fixée de boules blanches et noires). D'où $\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A_k)=1$. Soit

Exercices

Remarque.
Le système d'événements $(A_k)_{0\leq k\leq n}$ est un système complet (une poignée a nécessairement une composition fixée de boules blanches et noires). D'où $\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A_k)=1$. Soit

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}=1$$

ou encore

$$\sum_{k=1}^{n}C_a^k C_b^{n-k}=C_{a+b}^n$$

Exercices

Exercice

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire les boules une à une avec remise. Quelle est la probabilité pour que, sur m tirages, le plus grand des numéros tirés soit k ?

$\Omega =$ l'ensemble des m-listes avec répétition de $[|1, n|]$ et

$$\forall \omega \in \Omega, \; \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{n^m}.$$

$A_j =$ " le plus grand des numéros tirés est $\leq j$" avec $A_0 = \emptyset$.
$B_k =$" le plus grand des numéros tirés $= k$". On a :

$$B_k = A_k - A_{k-1} \qquad \text{donc} \qquad \mathbb{P}(B_k) = \mathbb{P}(A_k) - \mathbb{P}(A_{k-1}).$$

Les cas favorables à A_j sont les m-listes composées d'entiers compris entre 1 et j. Il y a donc j^m. D'où

Combinaisons avec répétition

Considérons n cases et p boules, toutes **identiques**.

Objectif : Répartir les p boules dans ces n cases.

- Représentons les séparations entre les cases par le symbole $\Big|$
- et les boules par des ronds O.

Une répartition des p boules dans les n cases

$$\Leftrightarrow$$

à placer sur un schéma $n-1$ bâtons et p ronds
(les deux cases extrêmes n'ayant pas besoin d'être délimitées que d'un seul côté).

Combinaisons avec répétition

Pour $n = 3$ et $p = 5$, on a :
$n = 3$ et $p = 5$ on a le schéma :

$$OO \quad |O \quad |OO$$

Un schéma est composé de : $p + n - 1$ symboles,
- parmi lesquels il faut choisir (par exemple) la place des p ronds,
- les autres places étant automatiquement occupées par des bâtons.

Il s'agit donc de choisir p places parmi $p + n - 1$, ce qui peut se faire de

$$C^{p}_{p+n-1} \quad \text{façons différentes.}$$

Definition

Combinaison **avec répétition** est une :
disposition non ordonnées de p éléments parmi n avec répétition possible.
Il y a

$$C_{n+p-1}^{p} \quad \text{combinaisons avec répétition} .$$

$(n_1, \ldots, n_k)$-partitions de E

Soit $n = Card(E)$ et $n_1, \ldots, n_k$ des entiers tels que $n_1 + \ldots + n_k = n$.

Definition

On appelle $(n_1, \ldots, n_k)$-partition de E un k-uplet d'ensembles $A_1, \ldots, A_k$ disjoints deux à deux et tels que
(i) $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = E$
(ii) $Card(A_i) = n_i, \quad \forall \quad 1 \leq i \leq k.$

Combien y a-t-il de choix possibles ?

$(n_1, \ldots, n_k)$-partitions de E. Combien y a-t-il de choix possibles ?

On fait un raisonnement de proche en proche.
- Choisir A_1 revient à choisir n_1 éléments dans E ce qui se fait de $C_n^{n_1}$ manières possibles.
- Une fois A_1 choisi, il reste donc $n - n_1$ éléments parmi lesquels on en choisit n_2, ce qui fait de $C_{n-n_1}^{n_2}$ manières, pour construire A_2.
- Et ainsi de suite. Le nombre cherché est donc

$$C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} \ldots C_{n_-(n_1+\ldots+n_k)}^{n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$$

Exemples

a) De combien de façons peut-on aligner 2 livres rouges, 5 livres verts et 1 livre blanc sur une étagère ?
(Seule la couleur différencie les livres !)

Exemples

a) De combien de façons peut-on aligner 2 livres rouges, 5 livres verts et 1 livre blanc sur une étagère ?
(Seule la couleur différencie les livres !)
a) On peut aligner ces 8 livres de $\frac{8!}{2!.5!.1!} = 168$ façons différentes

Exemples

a) De combien de façons peut-on aligner 2 livres rouges, 5 livres verts et 1 livre blanc sur une étagère ?
(Seule la couleur différencie les livres !)
a) On peut aligner ces 8 livres de $\frac{8!}{2!.5!.1!} = 168$ façons différentes

b) De combien de manière différentes peut-on placer l'une à côté de l'autre, 5 boules rouges, 3 vertes et 2 bleues ?

b) On peut placer ces 10 boules de $\frac{10!}{5!.3!.2!} = 2520$ manières différentes l'une à côté de l'autre.

Résumé

.

Tirage de p éléments parmi n éléments distincts (modèle de l'urne)

Tirage	avec ordre	sans ordre
sans remise	A_n^p	C_n^p
avec remise	n^p	C_{n+p-1}^p
	Boules distinctes	boules identique
	Distribution de p boules dans n cellules distinctes (problème d'occupation)	

Fonction densité sur $\Omega = \mathbb{R}$ oun intervalle I de $\mathbb{R}$

Si Ω est un intervalle de $\mathbb{R}$, on prend $\mathcal{A} = \mathcal{B}_\Omega$. .
$\mathcal{B}_\Omega$: tribu des boréliens (contient les intervalles et les points isolés de $\mathbb{R}$).

Definition

Une densité de probabilité est une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant 3 propriétés :

- $\forall x \in \Omega, \quad f(x) \geq 0.$
- f admet au plus un nombre fini de discontinuités dans chaque intervalle fini de Ω.
- f est integrable (au sens de Lebesgue) et $\displaystyle\int_\Omega f(x)dx = 1$.

Mesure de probabilité

Proposition

La mesure de probabilité, $\mathbb{P}$, est définie sur $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega)$ par

$$\mathbb{P} : \mathcal{B}_\Omega \longrightarrow [0,1]$$

$$A \longmapsto \mathbb{P}(A) = \int_A f(x)dx \quad \forall A \in \mathcal{B}$$

Preuve. La propriété 1) de la définition d'une mesure de probabilité est satisfaite puisque :

$$\mathbb{P}(A) = \int_A f(x)dx \geq 0.$$

La propriété 2) de la définition est aussi satisfaite car :

$$\mathbb{P}(\mathbb{R}) = \int f(x)dx = \int^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Preuve Proposition (suite)

La propriété 3) de la définition est aussi vérifiée car si $A_1, \ldots, A_n$ est une suite décroissante d'événements deux à deux disjoints, on doit démontrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Ceci est vérifiée car

$$\int_{\bigcup_{i=1}^{\infty}} f(x)dx = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} f(x)dx.$$

Propriétés vraies pour toute famille d'ensembles mesurables donc boréliens (et tels que $A_i \cap A_j = \emptyset$) **ssi** f est integrable sur A_i $\forall i \in \mathbb{N}$.

Remarque

.

$$\forall \ [a, b] \subset \mathbb{R} \quad \mathbb{P}([a, b]) = \int_a^b f(x)dx.$$

$$\forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow \{y\} \in \mathcal{B}_\Omega \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\{y\}) = \int_{\{y\}} f(x)dx = 0.$$

Si $A \in \mathcal{B}_\Omega$ est fini ou infini dénombrable alors $\mathbb{P}(A) = 0$.

Si Ω est un intervalle de $\mathbb{R}$, les résultats précédents s'appliquent en considérant $f(x) = 0 \quad \forall \quad x \notin \Omega$ et $\int_\Omega f(x)dx = 1$.

Comparaison (cas continu-cas discret)

Cas discret	Cas continu
$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$	$(\Omega, \mathcal{R}, f)$
$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) = 1$	$\mathbb{P}(\Omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$
$\forall A \in \mathcal{A}, \mathbb{P}(A) \geq 0$	$\forall x \in \mathbb{R}, f(x)) \geq 0$
$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega)$	$\mathbb{P}(A) = \int_A f(x)dx, \forall A \in \mathcal{R}$

Exemples

Exemple (loi exponentielle de paramètre λ)

Cette loi modélise la durée (en mois) avant la 1ère panne d'un équipement.

Exemples

Exemple (loi exponentielle de paramètre λ)

Cette loi modélise la durée (en mois) avant la 1ère panne d'un équipement.

- $\Omega = [0, +\infty[$
- $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

Exemples

Exemple (loi exponentielle de paramètre λ)

Cette loi modélise la durée (en mois) avant la 1ère panne d'un équipement.

- $\Omega = [0, +\infty[$
- $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$
- La probabilité que la panne arrive avant le 5ème mois est : $\mathbb{P}([0,5]) = \int_0^5 \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-5\lambda}$.

$$\forall A \in \mathcal{B}_\Omega \quad \mathbb{P}(A) = \int_{A \cap [0,\infty[} \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

La probabilité de A :"la panne après y " est

$$\mathbb{P}(A) = \int_y^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx$$

Exemples

Exemple (loi uniforme). choisir au hasard un nombre sur l'intervalle $[0,1]$. On définit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

On a

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^1 dx = 1 \quad \text{et} \quad \forall A \in \mathcal{B}_\Omega \quad \mathbb{P}(A) = \int_{A\cap[0,1]} 1.dx;$$

$$\mathbb{P}(([a,b]) = \int_a^b 1.dx = b - a$$

est la probabilité pour que le nombre choisi soit dans $[a,b]$.