II-Probabilité conditionnelle et indépendance

Naâmane LAIB

4 octobre 2017

Probabilité conditionnelle

Definition

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $B \in \mathcal{A}$ avec $\mathbb{P}(B) > 0$. A tout événement $A \in \mathcal{A}$, la probabilité de A sachant que B est réalisé :

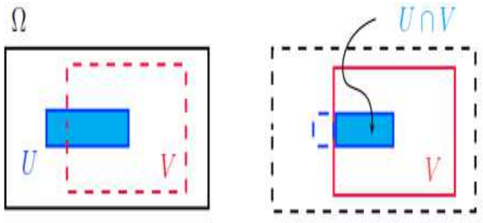
$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}. \tag{1}$$

Probabilité conditionnelle

La figure suivante illustre la définition de la probabilité de $A = U$ sachant $B = V$, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(U|V) = \mathbb{P}_V(U) = \frac{\mathbb{P}(U \cap V)}{\mathbb{P}(V)}.$$

Puisque $\mathbb{P}_V(V) = 1$, l'univers de $\mathbb{P}_V(\cdot)$ est restraint à $\Omega_V = V \subset \Omega$.



Probabilité conditionnelle : Proposition

Proposition

L'application

$$\mathbb{P}_B : \mathcal{A} \to [0,1] \qquad A \longmapsto \mathbb{P}_B(A)$$

est une mesure de probabilité sur la tribu $\mathcal{A}$ *ainsi que sur la tribu*

$$\mathcal{A}_B = \{A \cap B;\ B \in \mathcal{A}\}, \quad \textit{trace de} \quad \mathcal{A} \textit{ sur } B.$$

De plus $\mathcal{A}_B \subset \mathcal{A}$. *Elle est appelée probabilité conditionnée à* B.

L'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_B)$ est appelé l'espace de probabilité conditionnelle

Preuve de la proposition

1) $$0 \leq \mathbb{P}_B \leq 1 \textbf{ car } \quad \forall A \in \mathcal{A},\ 0 \leq \mathbb{P}_B(A) \leq \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$$

2)
$$\mathbb{P}_B(\Omega) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = 1.$$

Preuve de la proposition

1) $$0 \leq \mathbb{P}_B \leq 1 \textbf{ car } \quad \forall A \in \mathcal{A},\ 0 \leq \mathbb{P}_B(A) \leq \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$$

2)
$$\mathbb{P}_B(\Omega) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = 1.$$

3) $\mathbb{P}_B$ est σ-additive.

$(A_i)_{i\geq 1}$ évènements incompatibles deux à deux $\Rightarrow$ $(A_i \cap B)_{i\geq 1}$ sont égalements incompatibles, d'où

$$\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (A_i \cap B);$$

$$\mathbb{P}_B\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \frac{\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_B(A_i).$$

Probabilité conditionnelle : Exemple 1

Exemple

On jet **deux fois un dé**. *Soit A l'événement :*

"on obtient un **6 au premier jet***", et*
soient B_k, $2 \leq k \leq 12$, *les événements :*

"**la somme des entiers obtenus est** k".

Suite Exemple 1

On modélise les deux lancers de dé par l'espace probabilisé

$$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}) \quad \text{où} \quad \Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^2$$

$\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme. On a :

$$A = \{6\} \times \{1, 2, \dots, 6\} \quad \text{et} \quad B_k = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \; |\omega_1 + \omega_2 = k\}.$$

En particulier, on a :

$$B_{12} \subset A \quad \text{et} \quad B_{11} = \{(5, 6), (6, 5)\}.$$

Il en résulte que :

Suite Exemple 1

On modélise les deux lancers de dé par l'espace probabilisé

$$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}) \quad \text{où} \quad \Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}^2$$

$\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme. On a :

$$A = \{6\} \times \{1, 2, \ldots, 6\} \quad \text{et} \quad B_k = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \,|\omega_1 + \omega_2 = k\}.$$

En particulier, on a :

$$B_{12} \subset A \quad \text{et} \quad B_{11} = \{(5,6), (6,5)\}.$$

Il en résulte que :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}, \qquad \mathbb{P}(A|B_{12}) = 1, \qquad \mathbb{P}(A|B_{11}) = \frac{1}{2}.$$

Probabilité conditionnelle : Exercice 1

Exercice

Une urne $\mathbf{U_1}$ *contient :* **(3-bB, 5-bN)** *;*

une autre $\mathbf{U_2}$ *contient :* **(4-bB, 4-bN)***.*

On choisit une **urne** *au hasard, puis on* **tire simultanément 2 boules dans l'urne choisie***.*

Quelle est la probabilité d'avoir **(1-bB , 1-bN)** *sachant que l'urne choisie est* $\mathbf{U_1}$ *? est* $\mathbf{U_2}$*, respectivement ?*

Définir les deux nouveau espaces probabilisés associés à cet expérience.

Solution Exercice 1

B_i="on choisit l'urne $\mathcal{U}_i$" $(1 \leq i \leq 2)$; et
A="on obtient **(1-bB ; 1-bN)**"
On doit calculer : $\mathbb{P}(A|B_i)$.
Si B_1 est réalisé, on effectue le tirage dans $\mathcal{U}_1$. On aura donc

Solution Exercice 1

B_i="on choisit l'urne $\mathcal{U}_i$" $(1 \leq i \leq 2)$; et
A="on obtient **(1-bB ; 1-bN)**"
On doit calculer : $\mathbb{P}(A|B_i)$.
Si B_1 est réalisé, on effectue le tirage dans $\mathcal{U}_1$. On aura donc

$$\mathbb{P}(A|B_1) = \frac{C_3^1 \times C_5^1}{C_8^2} = \frac{15}{28}.$$

Si B_2 est réalisé, on effectue le tirage dans $\mathcal{U}_2$ $\Rightarrow$

Solution Exercice 1

B_i="on choisit l'urne $\mathcal{U}_i$" $(1 \leq i \leq 2)$; et
A="on obtient **(1-bB ; 1-bN)**"
On doit calculer : $\mathbb{P}(A|B_i)$.
Si B_1 est réalisé, on effectue le tirage dans $\mathcal{U}_1$. On aura donc

$$\mathbb{P}(A|B_1) = \frac{C_3^1 \times C_5^1}{C_8^2} = \frac{15}{28}.$$

Si B_2 est réalisé, on effectue le tirage dans $\mathcal{U}_2$ $\Rightarrow$

$$\mathbb{P}(A|B_2) = \frac{C_4^1 \times C_4^1}{C_8^2} = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}.$$

Les conditionnement par B_1 et B_2 $\Rightarrow$
2- nouveaux univers probabilisés.
Si l'on numérote les boules de 1 à 8 dans chaque urne et que l'on désigne par 1 et 2 les deux urnes,

Suite de Solution Exercice 1

l'univers initial (avant le conditionnement) est

$$\Omega = \{(i, \{j, k\}) \mid 1 \leq i \leq 2, \{j, k\} \subset [|1, 8|], \quad j \neq k\}.$$

Le premier conditionnement réduit Ω à

Suite de Solution Exercice 1

l'univers initial (avant le conditionnement) est

$$\Omega = \{(i, \{j,k\}) \mid 1 \leq i \leq 2, \{j,k\} \subset [|1,8|], \quad j \neq k\}.$$

Le premier conditionnement réduit Ω à

$$\Omega_1 = \{(1, \{j,k\}) \mid \quad \{j,k\} \subset [|1,8|], \quad j \neq k\},$$

muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}_{B_1}$.
Le second conditionnement le réduit à :

Suite de Solution Exercice 1

l'univers initial (avant le conditionnement) est

$$\Omega = \{(i, \{j, k\}) \mid 1 \leq i \leq 2, \{j, k\} \subset [|1, 8|], \quad j \neq k\}.$$

Le premier conditionnement réduit Ω à

$$\Omega_1 = \{(1, \{j, k\}) \mid \quad \{j, k\} \subset [|1, 8|], \quad j \neq k\},$$

muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}_{B_1}$.
Le second conditionnement le réduit à :

$$\Omega_2 = \{(2, \{j, k\}) \mid \quad \{j, k\} \subset [|1, 8|], \quad j \neq k\},$$

muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}_{B_2}$.

Probabilités conditionnelles en cascade : Proposition

Proposition

Si $\mathbb{P}(\mathbf{B}) > \mathbf{0}$, *on a*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_B(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Proposition

Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ *une suite finie d'événements tels que* $\mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leq i \leq n-1} A_i\right) > 0$. *alors*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leq i \leq n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2|A_1) \times \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots \times \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

Preuve de Proposition

Preuve. On remarque que toutes les probabilités conditionnelles introduites (dans le produit) sont bien définies, puisque

$$\forall\, 1 \le j \le n-1, \quad A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_i \cap \ldots \cap A_j \quad \supset \quad A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}$$

$$\forall\, 1 \le j \le n-1, \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap_{1\le i\le j} A_i\right) \ge \mathbb{P}\left(\bigcap_{1\le i\le n-1} A_i\right) > 0 \quad \text{(hypothèse).}$$

Le résulte se démontre par récurrence sur n

Probabilités conditionnelles : Exemple 2

Exemple

Deux urnes $\mathcal{U}_1$ *et* $\mathcal{U}_2$ *contenant* **chacune :2bN et 3bB**.
On tire **1b** *dans* $\mathcal{U}_1$, *on note sa couleur et on la* **remet dans** $\mathcal{U}_2$.
On tire alors **1b** *de* $\mathcal{U}_2$. *Les choix se faisant au hasard.*
Quelle est la probabilité d'obtenir **deux fois 1bN** *?*

N_1 ="la boule tirée de $\mathcal{U}_1$ est noire"
N_2 ="la boule tirée de $\mathcal{U}_2$ est noire".
On cherche : $\mathbb{P}(N_1 \cap N_2)$.

Probabilités conditionnelles : Exemple 2

Exemple

Deux urnes $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ contenant **chacune** *:***2bN et 3bB***.*
On tire **1b** *dans $\mathcal{U}_1$, on note sa couleur et on la* **remet dans** *$\mathcal{U}_2$.*
On tire alors **1b** *de $\mathcal{U}_2$. Les choix se faisant au hasard.*
Quelle est la probabilité d'obtenir **deux fois 1bN** *?*

$N_1 =$"la boule tirée de $\mathcal{U}_1$ est noire"
$N_2 =$"la boule tirée de $\mathcal{U}_2$ est noire".
On cherche : $\mathbb{P}(N_1 \cap N_2)$.
Or $\mathbb{P}(N_1) = \frac{2}{5}$ et $\mathbb{P}(N_2|N_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, car si l'on sait que le premier tirage a été noir, l'urne $\mathcal{U}_2$ contient maintenant 3 boules noires et 3 boules blanches. Ainsi :

Probabilités conditionnelles : Exemple 2

Exemple

Deux urnes $\mathcal{U}_1$ *et* $\mathcal{U}_2$ *contenant* **chacune** *:***2bN et 3bB**.
On tire **1b** *dans* $\mathcal{U}_1$, *on note sa couleur et on la* **remet dans** $\mathcal{U}_2$.
On tire alors **1b** *de* $\mathcal{U}_2$. *Les choix se faisant au hasard.*
Quelle est la probabilité d'obtenir **deux fois 1bN** *?*

N_1 ="la boule tirée de $\mathcal{U}_1$ est noire"
N_2 ="la boule tirée de $\mathcal{U}_2$ est noire".
On cherche : $\mathbb{P}(N_1 \cap N_2)$.
Or $\mathbb{P}(N_1) = \frac{2}{5}$ et $\mathbb{P}(N_2|N_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, car si l'on sait que le premier tirage a été noir, l'urne $\mathcal{U}_2$ contient maintenant 3 boules noires et 3 boules blanches. Ainsi :

$$\mathbb{P}(N_1 \cap N_2) = \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}(N_2|N_1) = \frac{2}{5}.\frac{1}{2} = \frac{1}{5}.$$

Probabilités conditionnelles : Exemple 3

Exemple

Une urne contenant **4- bB et 3-bN**. *On tire une à une et* **sans remise** 3 **boules** *de l'urne. Quelle est la probabilité que :*
la 1^{ere} **boule tirée soit blanche**, *la* 2^{eme} **blanche** *et la* 3^{eme} **noire** *?*

B_i="la i-ième boule tirée est blanche"
N_i="la i-ième boule tirée est noire"
On cherche $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap N_3)$. Or :

Probabilités conditionnelles : Exemple 3

Exemple

Une urne contenant **4- bB et 3-bN**. *On tire une à une et* **sans remise** 3 **boules** *de l'urne. Quelle est la probabilité que :*
la 1^{ere} **boule tirée soit blanche**, *la* 2^{eme} **blanche** *et la* 3^{eme} **noire** *?*

B_i="la i-ième boule tirée est blanche"
N_i="la i-ième boule tirée est noire"
On cherche $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap N_3)$. Or :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2|B_1).\mathbb{P}(N_3|B_1 \cap B_2) = \frac{4}{7}.\frac{3}{6}.\frac{3}{5} = \frac{6}{35}$$

puisqu'à tout moment du tirage on connaît la composition de l'urne.

Probabilités conditionnelles : Système complet

Definition

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle système **complet** (ou exhaustif) une suite (finie ou infinie) $(A_i)_{i\geq 0}$ formée d'événements deux à deux incompatibles, distincts de $\emptyset$, telle que

$$\bigcup_{i\geq 0} A_i = \Omega$$

Formule des probabilités totales

Theorem

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé, et* $(A_i)_{i\geq 1}$ *un système complét dévénemnts tous de probabilité non nulle. On a alors, pour tout événement* $B \in \mathcal{A}$ *:*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}(B|A_i)\ \mathbb{P}(A_i). \tag{2}$$

Un cas particulier $(A, \overline{A})$ est un système complet avec $0 < \mathbb{P}(A) < 1$. On alors

$$\forall B \in \mathcal{A}, \quad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\bar{A})\mathbb{P}(\bar{A}) \tag{3}$$

Preuve Théorème

Preuve. On a $\Omega = \cup_i A_i$ avec $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$. Or
$B = B \cap \Omega = \cup_i (A_i \cap B)$.
Les événements $A_i \cap B$, $i \geq 1$ sont 2 à 2 incompatibles, on obtient en utilisant la σ-additivité de $\mathbb{P}$:

Preuve Théorème

Preuve. On a $\Omega = \cup_i A_i$ avec $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$. Or $B = B \cap \Omega = \cup_i (A_i \cap B)$.
Les événements $A_i \cap B$, $i \geq 1$ sont 2 à 2 incompatibles, on obtient en utilisant la σ-additivité de $\mathbb{P}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B \cap A_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B|A_i)\ \mathbb{P}(A_i)
\end{aligned}$$

Exercice

Exercice

Une urne contenant n_1 **boules blanches et** n_2 **boules noires**.
On **tire une boule** *de cette urne,*

- *si elle est* **blanche**, *on la* **remet** *dans l'urne,*
- *si elle est* **noire**, *on la remplace par a boules blanches prises dans une réserve auxiliaire* $(a \in \mathbb{N})$.

On tire alors une **deuxième boule de l'urne**.

Quelle est la probabilité que la **deuxième boule tirée soit blanche** *?*

Solution : Exercice

Soient B_1="la première boule tirée est blanche".
$\{B_1, \bar{B}_1\}$ est un système complét d'événements,

la formule des probabilités totales relativement à :
B_2 ="la deuxième boule tirée est blanche".

$$\mathbb{P}(B_2) =$$

Solution : Exercice

Soient B_1="la première boule tirée est blanche".
$\{B_1, \bar{B}_1\}$ est un systéme complét d'événements,

la formule des probabilités totales relativement à :
B_2 ="la deuxième boule tirée est blanche".

$$\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2|B_1) + \mathbb{P}(\bar{B}_1)\mathbb{P}(B_2|\bar{B}_1)$$

$$\mathbb{P}(B_1) = \frac{n_1}{n_1 + n_2}, \quad \mathbb{P}(\bar{B}_1) = \frac{n_2}{n_1 + n_2},$$
$$\mathbb{P}(B_2|B_1) = \frac{n_1}{n_1 + n_2}, \ \mathbb{P}(B_2|\bar{B}_1) =$$

Solution : Exercice

Soient B_1="la première boule tirée est blanche".
$\{B_1, \bar{B}_1\}$ est un système complét d'événements,

la formule des probabilités totales relativement à :
B_2 ="la deuxième boule tirée est blanche".

$$\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2|B_1) + \mathbb{P}(\bar{B}_1)\mathbb{P}(B_2|\bar{B}_1)$$

$$\mathbb{P}(B_1) = \frac{n_1}{n_1 + n_2}, \quad \mathbb{P}(\bar{B}_1) = \frac{n_2}{n_1 + n_2},$$

$$\mathbb{P}(B_2|B_1) = \frac{n_1}{n_1 + n_2}, \ \mathbb{P}(B_2|\bar{B}_1) = \frac{n_1 + a}{n_1 + n_2 + a - 1}. \Rightarrow$$

$$\mathbb{P}(B_2) = \left(\frac{n_1}{n_1 + n_2}\right)^2 + \frac{n_2}{n_1 + n_2} . \frac{n_1 + a}{n_1 + n_2 + a - 1}.$$

Formule de Bays

Problème. On se donne une suite d'événements $(A_i)_{i\geq 0}$ qui forme un système complet.

On connaît $\mathbb{P}(B|A_i)$.

Comment faire pour calculer $\mathbb{P}(A_i|B)$?

Theorem

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_i)_{i\geq 1}$ un système complet d'événements. Alors

$$\forall\ B \in \mathcal{A}, \quad \forall i \geq 1, \qquad \mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\ \mathbb{P}(A_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B|A_i)\ \mathbb{P}(A_i)}.$$

Formule de Bays : Preuve du théorème

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\ \mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Ensuite on applique la formule des

Formule de Bays : Preuve du théorème

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\ \mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Ensuite on applique la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(B|A_i)\ \mathbb{P}(A_i). \tag{4}$$

Formule de Bays : Exemple

Exemple

On prend **un dé** *au hasard parmi un lot de* 100 **dés** *dont on sait que* 25 **sont pipés**.

Pour un **dé pipé**, *la probabilité d'obtenir* 6 **est** $\frac{1}{2}$.

On lance le dé choisit et on obtient 6.
Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

On relance alors ce dé et on obtient à nouveau 6.
Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

Formule de Bays : Exemple (suite)

T="le dé est pipé",
S_1="on obtient 6 au premier lancer".
$\{T, \bar{T}\}$ forme un système complét d'événements, en utilisant la formule de Bayes. On a :

$$\mathbb{P}(T) = \frac{1}{4},\ \mathbb{P}(\bar{T}) = \frac{3}{4},\ \mathbb{P}(S_1|T) = \frac{1}{2},\ \mathbb{P}(S_1|\bar{T}) = \frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$\mathbb{P}(T|S_1) =$$

Formule de Bays : Exemple (suite)

T="le dé est pipé",
S_1="on obtient 6 au premier lancer".
$\{T, \bar{T}\}$ forme un système complét d'événements, en utilisant la formule de Bayes. On a :

$$\mathbb{P}(T) = \frac{1}{4}, \ \mathbb{P}(\bar{T}) = \frac{3}{4}, \ \mathbb{P}(S_1|T) = \frac{1}{2}, \ \mathbb{P}(S_1|\bar{T}) = \frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$\mathbb{P}(T|S_1) = \frac{\mathbb{P}(T)\mathbb{P}(S_1|T)}{\mathbb{P}(T).\mathbb{P}(S_1|T) + \mathbb{P}(\bar{T}).\mathbb{P}(S_1|\bar{T})} = \frac{1}{2}.$$

Soit S_2="on obtient 6 aux deux premiers lancers". On a de même :

$$\mathbb{P}(T|S_2) =$$

Formule de Bays : Exemple (suite)

T="le dé est pipé",
S_1="on obtient 6 au premier lancer".
$\{T, \bar{T}\}$ forme un système complét d'événements, en utilisant la formule de Bayes. On a :

$$\mathbb{P}(T) = \frac{1}{4},\ \mathbb{P}(\bar{T}) = \frac{3}{4},\ \mathbb{P}(S_1|T) = \frac{1}{2},\ \mathbb{P}(S_1|\bar{T}) = \frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$\mathbb{P}(T|S_1) = \frac{\mathbb{P}(T)\mathbb{P}(S_1|T)}{\mathbb{P}(T).\mathbb{P}(S_1|T) + \mathbb{P}(\bar{T}).\mathbb{P}(S_1|\bar{T})} = \frac{1}{2}.$$

Soit S_2="on obtient 6 aux deux premiers lancers". On a de même :

$$\mathbb{P}(T|S_2) = \frac{\mathbb{P}(T)\mathbb{P}(S_2|T)}{\mathbb{P}(T).\mathbb{P}(S_2|T) + \mathbb{P}(\bar{T}).\mathbb{P}(S_2|\bar{T})} = \frac{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{3}{4}\frac{1}{36}} = \frac{3}{4}.$$

Formule de Bays : Exemple (suite)

Plus généralement si S_n désigne l'événement "on obtient 6 aux n premiers lancers", on montre que

$$\mathbb{P}(T|S_n) = \frac{1}{1+(1/3)^{n-1}}.$$

On en déduit en particulier que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(T|S_n) = 1.$$

Indépéndance Stochastique

$A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$ sont indépendants si :
La réalisation de l'un n'influe pas sur la réalisation de l'autre.

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B) \Rightarrow \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B).$$

Définitions.

1. Des événemnts (A_i) sont dits **deux à deux indépendants** si et seulement si :
$$\forall i, j, \; i \neq j, \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i).\mathbb{P}(A_j)$$
2. m événements $A_1, \; A_2, \ldots, A_m$ sont indépendants si :
$$\forall I \subset \{1, \ldots, m\} \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

Remarque

-Attention. Il ne suffit pas que

$$\mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

pour que les événements soient indépendants.

Exemple : Soient A, B et C trois événements. Ils sont mutuellement indépendants ssi :

- $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$
- $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$
- $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$
- $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$

Indépéndance : Tirage avec ou sans remise

Les tirages avec remise (non exhaustifs) ou sans remise (exhaustifs) illustrent bien les notions d'indépendance et de dépendance.

Exemple

Soit une urne contenant n boules rouges (R) et $N-n$ boules blanches (B). On cherche la probabilité de tirer deux boules rouges.

Indépéndance : Tirage avec remise

Soit :
R_1="obtenir une boule rouge au premier tirage",
R_2="obtenir une boule rouge au deuxième tirage"
Ici les tirages sont indépendants puisque la composition de l'urne reste constante au cours des tirages.

$$\mathbb{P}(R_2|R_1) = \mathbb{P}(R_2).$$

$\mathbb{P}(R_1) = \mathbb{P}(R_2) = \frac{n}{N}$
$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}(R_2) = \left(\frac{n}{N}\right)^2.$

Indépéndance : Tirage sans remise

La décomposition de l'urne évolue au cours des tirages :

$$\mathbb{P}(R_1) = \frac{n}{N} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\bar{R}_1) = 1 - \frac{n}{N}.$$

Après le premier tirage d'une boule rouge, il reste $(n-1)$ boules rouges sur $(N-1)$ boules au total. Donc

$$\mathbb{P}(R_2|R_1) = \frac{n-1}{N-1} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(R_2|\bar{R}_1) = \frac{n}{N-1}.$$

On calcule ensuite $\mathbb{P}(R_2)$; on retrouve une expression semblable avec l'application du théorème de Bayes.

$$\mathbb{P}(R_2) = \mathbb{P}(R_1 \cap R_2) + \mathbb{P}(\bar{R}_1 \cap R_2) = \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}(R_2|R_1) + \mathbb{P}(\bar{R}_1)\mathbb{P}(R_2|\bar{R}_1) = \frac{n}{N}.$$

Conclusion : $\mathbb{P}(R_2|R_1) \neq \mathbb{P}(R_2)$ Les tirages sont dépendants.

Indépendance et incompatibilité

Ne pas confondre indépendance et incompatibilité

$$\mathbb{P}(A \cap B) \neq 0 \Rightarrow A \quad \text{et} \quad B \quad \text{compatibles},$$

ils pourront être dépendants ou indépendants.

L'indépendance est une notion qui dépend de **la probabilité**.
Elle **s'exprime donc dans** $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$,

alors que l'incompatibilité est la disjonction des événements.
Elle **s'exprime donc dans** $(\Omega, \mathcal{A})$.

Exemple

Exemple

(Compatibles et indépendants).

A=" aimer la musique"
B=" vivre à la campagne".
A et B sont compatibles, donc $\mathbb{P}(A \cap B) \neq 0$
(on peut à la fois aimer la musique et vivre à la campagne).

A et B sont indépendant (l'apport d'information sur la réalisation de A (ou B) ne modifie pas la probabilité de réalisation de B (ou A),
et donc $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Exemple

Exemple

(Incompatibles, sont-ils dépendants ou indépendants ?)

Supposons que $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ (incompatibles) et que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$.
Alors, puisque

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = 0 \neq \mathbb{P}(A).$$

Les deux événements sont donc dépendants.