

## Probabilités : III- Variables aléatoires

Naâmane LAIB

11 octobre 2017

# But

Décrire et étudié l'état d'un système aléatoire évoluant au cours du temps en introduisant des fonctions définies sur des espaces probabilisés. Ces fonctions sont appelées variables aléatoires.

# Image réciproque-Tribu borélien

## Definition

Soit  $f : E \rightarrow F$  et  $A \subset F$

$$f^{-1}(A) = \{x \in E : f(x) \in A\}$$

## Definition

$$\mathcal{A} = \{]a, b[ : a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; \infty\}\}$$

l'ensemble des intervalles ouverts de  $\mathbb{R}$ .

La tribu des boréliens  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  est la plus petite tribu engendrée par  $\mathcal{A}$ , c'est-à-dire  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) := \sigma(\mathcal{A})$ .

# Application mesurable

## Definition

Soit  $(\Omega, \mathcal{A})$  et  $(\Omega', \mathcal{A}')$  deux espace mesurables.

Une application  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$  est mesurable (par rapport aux tribus  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$ ) si

$$\forall B \in \mathcal{A}' \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

# Variables aléatoires

## Definition

On appelle variable aléatoire réelle (v.a.r.) sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  toute application mesurable

$$X : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

C'est à dire  $X$  vérifie

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{A}, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

$X(\Omega)$  est appelé univers image de  $\Omega$  par  $X$ .

# Variables aléatoires

## Proposition

Une application  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une v.a.r. sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  si :

$$X^{-1}(] - \infty, x]) \in \mathcal{A}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Une v.a.  $X$  représente une quantité inconnue qui dépend de l'issue de l'expérience. On connaît les valeurs que  $X$  peut éventuellement prendre avant de réaliser l'expérience, mais on ne sait pas encore quelle valeur va effectivement prendre lorsqu'on réalise l'expérience.
- Ainsi une v.a. est une application qui à une expérience aléatoire associe un résultat,

$$X : \Omega \longrightarrow X(\Omega) \subset \mathbb{R} \quad \omega \longmapsto X(\omega) = \text{nombre réel.}$$

# Variables aléatoires : Notations

Pour alléger les notations, on écrira :

- $(X \in B)$  pour l'ensemble

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}, \text{ où } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

$(X \in B)$  se note aussi  $[X \in B]$  ou  $\{X \in B\}$ . De même

- 

$$(X = x) = X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}, \text{ où } x \in \mathbb{R}.$$

- 

$$(X \leq x) = X^{-1}(\{] - \infty, x]) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}.$$

- 

$$(a < X \leq b) = X^{-1}(]a, b]) = \{\omega \in \Omega : a < X(\omega) \leq b\}$$

Notons que tous ces ensembles sont des événements de la tribu  $\mathcal{A}$ .

# Variables aléatoires : Notations

Ces notations simplifient l'écriture des événements composés.

- $(X \in A)$  et  $(X \in B) = (X \in A \cap B)$ . en effet,

$$\begin{aligned}(X \in A) \cap (X \in B) &= X^{-1}(A) \cap X^{-1}(B) \\ &= X^{-1}(A \cap B) = (X \in A \cap B)\end{aligned}$$

- $(X \in A)$  ou  $(X \in B) = (X \in A \cup B)$ ; en effet :

$$\begin{aligned}(X \in A) \cup (X \in B) &= X^{-1}(A) \cup X^{-1}(B) \\ &= X^{-1}(A \cup B) = (X \in A \cup B)\end{aligned}$$

- $(X \notin A) = (X \in A)^c$

- On notera également si  $X$  et  $Y$  sont deux v.a.r.

$$(X \in A, Y \in B) = (X \in A) \text{ et } (Y \in B) = (X \in A) \cap (Y \in B)$$

# Loi de probabilité d'une v.a

## Proposition

$X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  une v.a. L'application

$\mathbb{P}_X : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$  définie  $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  par :

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) \in B\}) := \mathbb{P}(X^{-1}(B)),$$

est une mesure de probabilité sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ .

## Definition

- $\mathbb{P}_X$  est appelée loi de  $X \Leftrightarrow X$  suit la loi  $\mathbb{P}_X$ .
- $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mathbb{P}_X)$  : **espace de probabilité induit** par  $X$ .
- $\mathbb{P}_X$  permet de transporter la structure probabilistique de  $\Omega$  vers  $\mathbb{R}$ .

# Exemple : Lancement de 2 dèss équilibrés

## Exemple

Expérience aléatoire : *Lancement de 2 dèss équilibrés*

① *Variable aléatoire :*

$$X(\omega) = x + y \quad \text{si } \omega = (x, y)$$

$\Leftrightarrow X$  *représente la somme des résultats obtenus*

② *variable aléatoire :*

$$Y(\omega) = \begin{cases} x & \text{si } \omega = (x, 2) \\ 0 & \text{si } \omega = (x, y) \quad y \neq 2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$Y$  *donne la valeur du résultat sur le 1<sup>er</sup> dé quand le 2<sup>eme</sup> donne 2.*

## Expérience de 2 dè

## Exemple

$\Omega = \{(i, j), (i, j) \in [1, 6]^2\}$ ,  $\text{Card}(\Omega) = 36$   $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{36}$

Soit  $X$  la variable aléatoire définie par :  $X(\omega) = x + y$  si  
 $\omega = (x, y) \Leftrightarrow X$  représente la somme des résultats obtenus.

$$\mathbb{P}_X(\{12\}) = \mathbb{P}_X(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 12\}) = 1/36$$

$$\mathbb{P}_X(]8, 9[) = \mathbb{P}_X(\{\omega \in \Omega : 8 < X(\omega) < 9\}) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_X([4, 8]) &= \mathbb{P}_X(\{\omega \in \Omega : 4 \leq X(\omega) \leq 9\}) \\ &= \mathbb{P}(\{(1, 3), (3, 1), (2, 2), (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2), \\ &\quad (5, 1), (1, 5), (2, 4), (4, 2), (3, 3), (1, 6), (6, 1), (2, 5), \\ &\quad (5, 2), (3, 4), (4, 3)\}) = 18/36 \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}_X([11, +\infty[) = \mathbb{P}_X(\{\omega \in \Omega : 11 \leq X(\omega) \leq +\infty\}) = 3/36$$

# Expérience aléatoire (chaîne de production)

Classement d'une pièce : défectueuse (**d**) OU acceptable (**a**).

$\Omega = \{a, d\}$  Espace de probabilité :  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$  où :

$\mathbb{P}(\{a\}) = p$  associée à la pièce acceptable **succès** ( $0 < p < 1$ )

$\mathbb{P}(\{d\}) = 1 - p = q$  associée à la pièce défectueuse **échec**

**Variable aléatoire associée** :  $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\omega = (a, d) \longmapsto X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si pièce acceptable} \\ 0 & \text{si pièce défectueuse} \end{cases}$$

$$\mathbb{P}_X(1) = \mathbb{P}(\{a\}) = p$$

$$\mathbb{P}_X(0) = \mathbb{P}(\{d\}) = 1 - p.$$

# Fonction de Répartition et Fonction de Masse

La mesure  $\mathbb{P}$  permet de **quantifier** le comportement aléatoire de la variable  $X$  moyennant la fonction de répartition.

## Definition

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  espace probabilité et  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une v.a.

1) **Fonction de répartition**  $F_X$  (associée à la mesure  $\mathbb{P}_X$ ) :

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad x \mapsto F_X(x) = \mathbb{P}_X([-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

2) **Fonction de masse**  $p_X(x)$  :

$$p_X(x) = \mathbb{P}_X(\{x\}) = \mathbb{P}(X = x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$p_X(-\infty) = \mathbb{P}_X(\{-\infty\}) = 0$$

$$p_X(+\infty) = \mathbb{P}_X(\{+\infty\}) = 0$$

# Propriétés de $F_X$

## Théorème

- 1  $0 \leq F_X \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- 2  $F_X$  est croissante ( au sens large)
- 3  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$
- 4  $F_X$  est continue à droite en tout point  $x \in \mathbb{R}$  (mais pas forcément à gauche)
- 5  $\lim_{y \rightarrow x: y < x} F_X(y) = F_X(x) - p_X(x)$ .
- 6 Le nombre  $p_X(x) = \lim_{y \rightarrow x: y < x} F_X(y) - F_X(x)$  est la hauteur du saut de  $F_X$  en  $x$ .

# Exemple : Classification des pièces

## Exemple

*On considère l'expérience de la classification des pièces défectueuses ou non. On a pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :*

### 1) **Fonction de répartition**

i) si  $x \in ]-\infty; 0[$ :  $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 0$

# Exemple : Classification des pièces

## Exemple

*On considère l'expérience de la classification des pièces défectueuses ou non. On a pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :*

### 1) Fonction de répartition

i) si  $x \in ]-\infty; 0[$ :  $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 0$

**l'événement  $\{X \leq x\}$  est impossible, car la plus petite valeur prise par  $X$  est 0**

ii) si  $x \in [0, 1[$ :  $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$

# Exemple : Classification des pièces

## Exemple

*On considère l'expérience de la classification des pièces défectueuses ou non. On a pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :*

### 1) Fonction de répartition

i) si  $x \in ]-\infty; 0[$ :  $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 0$

**l'événement  $\{X \leq x\}$  est impossible, car la plus petite valeur prise par  $X$  est 0**

ii) si  $x \in [0, 1[$ :  $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$

**la seule valeur prise par  $X$  dans l'intervalle  $[0, 1[$  est 0 ;**

## Suite exemple

iii) si  $x \in [1, +\infty[$ :  $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = 1 - p + p = 1$ .

$$F_X(x) = \mathbb{P}_X(\{]-\infty, x]\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - p & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

## 1) Fonction de masse

$$p_X(x) = \begin{cases} 1 - p & \text{si } x = 0 \\ p & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

## Exemple

## Exemple

On joue deux fois de suite à pile ou face.  $\Omega = \{pp, pf, fp, ff\}$  (l'ordre des lancers est pris en compte). Le nombre d'apparitions de pile est la variable aléatoire :

$$X(\omega) = \begin{cases} 2 & \text{si } \omega = pp \\ 1 & \text{si } \omega = \{pf, fp\} \\ 0 & \text{si } \omega = ff \end{cases}$$

Nous avons :

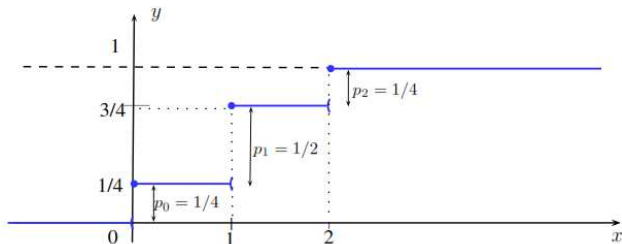
$$\mathbb{P}(\{pp\}) = \mathbb{P}(\{pf\}) = \mathbb{P}(\{fp\}) = \mathbb{P}(\{ff\}) = \frac{1}{4}.$$

$$\mathbb{P}(\{X = 0\}) = \mathbb{P}(\{X = 2\}) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\{X = 1\}) = \frac{1}{2}.$$

## Exemple (suite)

La fonction de répartition

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in ]-\infty; 0[ \\ \frac{1}{4} & \text{si } x \in [0, 1[ \\ \frac{3}{4} & \text{si } x \in [1, 2[ \\ 1 & \text{si } x \in [2, +\infty[ \end{cases}$$

Représentation graphique de  $y = F_X(x)$

## Exemple (suite)

On constate que :

- $F_X$  ne croît que pour les valeurs prises par  $X$  : 0, 1 et 2

## Exemple (suite)

On constate que :

- $F_X$  ne croît que pour les valeurs prises par  $X$  : 0, 1 et 2
- $F_X$  est constante par intervalle et sa représentation graphique est en escalier

## Exemple (suite)

On constate que :

- $F_X$  ne croît que pour les valeurs prises par  $X$  : 0, 1 et 2
- $F_X$  est constante par intervalle et sa représentation graphique est en escalier
- Les sauts de l'escalier se situent aux abscisses  $x_i$  : 0, 1, 2

## Exemple (suite)

On constate que :

- $F_X$  ne croît que pour les valeurs prises par  $X$  : 0, 1 et 2
- $F_X$  est constante par intervalle et sa représentation graphique est en escalier
- Les sauts de l'escalier se situent aux abscisses  $x_i$  : 0, 1, 2
- La hauteur de chacune des marches est respectivement :

## Exemple (suite)

On constate que :

- $F_X$  ne croît que pour les valeurs prises par  $X$  : 0, 1 et 2
- $F_X$  est constante par intervalle et sa représentation graphique est en escalier
- Les sauts de l'escalier se situent aux abscisses  $x_i$  : 0, 1, 2
- La hauteur de chacune des marches est respectivement :

$$p_0 = \mathbb{P}(X = 0), \quad p_1 = \mathbb{P}(X = 1), \quad p_2 = \mathbb{P}(X = 2).$$

## Exemple (suite)

On constate que :

- $F_X$  ne croît que pour les valeurs prises par  $X$  : 0, 1 et 2
- $F_X$  est constante par intervalle et sa représentation graphique est en escalier
- Les sauts de l'escalier se situent aux abscisses  $x_i$  : 0, 1, 2
- La hauteur de chacune des marches est respectivement :

$$p_0 = \mathbb{P}(X = 0), \quad p_1 = \mathbb{P}(X = 1), \quad p_2 = \mathbb{P}(X = 2).$$

- On a par exemple :

$$\lim_{y \rightarrow 1: y < 1} F_X(y) = F_X(1) - p_X(1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq F_X(1)$$

$$\lim_{y \rightarrow 1: y > 1} F_X(y) = \frac{3}{4} = F_X(1)$$

# Fonction de répartition (suite)

**Remarque.** D'après le théorème 1, on a

$$p_X(x) = F_X(x) - \lim_{y \rightarrow x: y < x} F_X(y)$$

Si  $p_X(x) \neq 0 \Rightarrow F_X$  est **discontinue** en  $x$

- et  $p_X$  représente la **hauteur du saut** de  $F_X$  en  $x$ .

# Cas discret

## Definition

Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une v.a.

$D_X = \{x : p_X(x) > 0\}$  est appelé **support** de  $X$

$X$  est une **variable aléatoire discrète** si et seulement si

- 1  $D_X \neq \emptyset$
- 2  $\sum_{x \in D_X} p_X(x) = 1$

# Exemple

## Exemple

*L'exemple du test des pièces défectueuses et acceptables est un exemple de variable aléatoire discrète car :*

$$\Omega = \{a, d\}, \quad D_X = \{0, 1\}, \quad \mathbb{P}(\{a\}) = p, \quad \mathbb{P}(\{d\}) = 1 - p$$

$$\sum_{x \in D_X} p_X(x) = p_X(0) + p_X(1) = 1 - p + p = 1.$$

## Théorème

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \begin{cases} 0 & \text{si } B \cap D_X = \emptyset \\ \sum_{x \in B \cap D_X} p_X(x) & \text{si } B \cap D_X \neq \emptyset \end{cases}$$

# Construction d'une variable aléatoire discrète

Construire une v.a. discrète revient à donner :

- 1 un sous-ensemble  $D \subset \mathbb{R}$  discret
- 2 une application  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tel que

$$p(x) = 0 \quad \forall x \notin D$$

$$p(x) > 0 \quad \forall x \in D$$

$$\sum_{x \in D} p(x) = 1$$

- 3 Définir une mesure  $\mathbb{P}_X$  :

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \quad \mathbb{P}(X \in B) = \sum_{x \in B \cap D} p_X(x)$$

avec

$$\sum_{x \in B \cap D} p_X(x) = 0 \quad \text{si} \quad B \cap D = \emptyset.$$

## Cas où $\Omega$ est fini ou dénombrable

Si  $D_X = X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$  est fini ou dénombrable. Loi de probabilité est déterminée par :

- la suite des  $p_i = P_X(\{x_i\}) = P(X = x_i)$
- ou sous la forme d'un tableau :

valeurs de $X$	$x_1$	...	$x_n$	...
probabilité	$p_1$	...	$p_n$	...

- ou sous la forme

$$\mathbb{P}_X = \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta_{x_i},$$

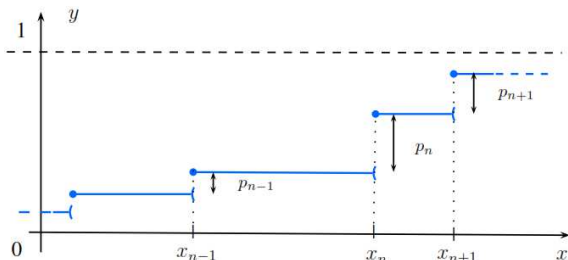
où  $\delta_x$  est la masse de Dirac au point  $x$ ,

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Forme générale de  $F_X$  :

$$F_X(x) = \sum_{n \geq 1} q_n \mathbf{1}_{[x_{n-1}, x_n[}(x) \quad \text{où} \quad q_n = \sum_{1 \leq j \leq n} p_j.$$



Représentation graphique de  $y = F_X(x)$

## Cas continu : Densité de probabilité

Dans le cas des **v.a. continues**, la **loi de probabilité** de  $X$  est définie à partir de la fonction de **densité**  $f_X$  de  $X$ .

### Definition

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une densité de probabilité si :

- $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $f$  admet au plus un nombre fini de discontinuité quelque soit l'intervalle borné de  $\mathbb{R}$
- $f$  est intégrable (au sens de Lebesgue) et  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ .
- Lien entre  $F_X$  et  $f_X(x)$  :  

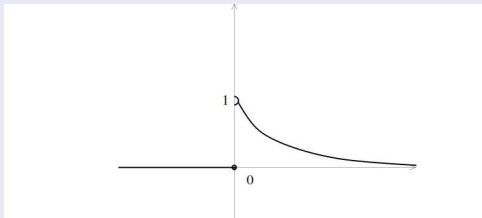
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \mathbb{P}_X(] - \infty, x]) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

# Exemple

## Exemple

Soit  $X$  une v.a. et  $f_X$  une fonction définie par

$$f_X : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x} \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}}$$



## Suite (Exemple)

On a :

$$- f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

- On remarque qu'elle est continue partout (sauf en 0)

Donc  $f$  est une densité de probabilité.

a) Calculer  $\mathbb{P}(X \geq 1)$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq 1) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x} \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}} \mathbf{1}_{\{x \geq 1\}} dx \\ &= \int_1^{\infty} e^{-x} dx = e^{-1}. \end{aligned}$$

## Exemple (suite)

### b) Fonction de répartition

$$- \text{ Si } t < 0; \quad F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x} \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}} \mathbf{1}_{\{x \leq t\}} dx = 0.$$

$$- \text{ Si } t \geq 0; \quad F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x} \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}} \mathbf{1}_{\{x \leq t\}} dx.$$

$$= \int_0^t e^{-x} dx = 1 - e^{-t}.$$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

## Propriétés de densité

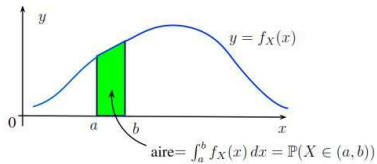
Soit  $X$  une v.a. continue :  $C_X = \{x : f_X(x) > 0\} \equiv$  **Support de  $X$** .

### Théorème

Si  $X$  v.a. continue,  $C_X \neq \emptyset$ . Alors

- $F_X$  est continue
- Si  $f_X$  est elle-même continue,  $F_X$  est dérivable (de classe  $C^1$ ) et  $F'_X = f_X$
- $\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \quad \mathbb{P}(X \in A) = \int_{A \cap C_X} f_X(x) dx$
- $\mathbb{P}(X = x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- Pour tous  $a \leq b$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \in ]a, b]) &= \mathbb{P}(X \in [a, b]) = \mathbb{P}(X \in ]a, b[) \\ &= \mathbb{P}(X \in [a, b]) = \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$



# Détermination d'une v.a. continue $X$ à partir de $f_X$

Cela revient à déterminer :

- $C_X$  intervalle de  $\mathbb{R}$  (support de  $X$ )
- $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$  tel que :
  - $f(x) > 0$  si  $x \in C_X$  (support de  $X$ )
  - $f(x) = 0$  si  $x \notin C_X$
  - $f$  admet un nombre fini de discontinuités sur chaque intervalle borné de  $\mathbb{R}$
  - $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$  ( $f$  intégrable)
  - $\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(x)dx = \int_{B \cap C_X} f(x)dx \quad \forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$
  - Sa fonction de répartition est donnée par

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt$$

# Détermination d'une v.a. continue $X$ à partir de $F_X$

Pour vérifier que  $X$  est une variable aléatoire continue (étant donnée  $F_X$ ), il faut que  $F'_X$  vérifie les propriétés suivantes :

- 1  $F'_X$  existe sauf au plus un nombre fini de points
- 2  $F'_X \geq 0$
- 3  $F'_X$  continue sur chaque intervalle où elle est définie.
- 4

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F'_X(x) dx = 1.$$

## Indépendance de variables aléatoires

### Definition

Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux v.a. définies  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

$X_1, X_2$  sont indépendantes si  $\forall B_i, B_j \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$

$$\mathbb{P}(\{X_1 \in B_i\} \cap \{X_2 \in B_j\}) = \mathbb{P}(\{X_1 \in B_i\}) \times \mathbb{P}(\{X_2 \in B_j\}).$$

La loi de probabilité  $\mathbb{P}_{(X_1, X_2)}$  est égale au produit des lois  $\mathbb{P}_{X_1}$  et  $\mathbb{P}_{X_2}$ .

▷  $X_1, \dots, X_n$ , n-v.a.r., définies  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  et à valeurs respectivement dans  $(E_i, \mathcal{B}_i)$ , sont indépendantes si quelques soient les boréliens  $B_1, \dots, B_n$ , on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \in B_i\}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(\{X_i \in B_i\}).$$

## Exemple : Jets de deux dés

On jette simultanément deux dés équilibrés discernables.

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^2 = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 6\}$$

$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$  est muni de la probabilité uniforme. Si on note  $X_1 =$  "valeur du 1<sup>er</sup> dé" et  $X_2 =$  "valeur du 2<sup>e</sup> dé", on a

$$X_1(i, j) = i \quad \text{et} \quad X_2(i, j) = j$$

$$\mathbb{P}(X_1 = i) = \mathbb{P}(X_2 = i) = \frac{1}{6} \quad \forall i \in [1, 6]$$

et pour tout  $i, j \in [1, 6]$

$$\mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j) = \frac{1}{36} = \mathbb{P}(X_1 = i) = \mathbb{P}(X_2 = j)$$

Les variables  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes.

# Fonction de v.a.

## Théorème

Si pour tout  $i$ , les fonctions

$$\varphi_i : (E_i, \mathcal{B}_i) \rightarrow (E'_i, \mathcal{B}'_i)$$

sont des fonctions *mesurables*, alors

*l'indépendance des v.a.  $(X_i)_{i=1, \dots, n}$*

*entraîne celles des  $(\varphi_i(X_i))_{i=1, \dots, n}$ .*

# Exemples

- Si  $X$  et  $Y$  sont des v.a.r. indépendantes,  $X^2$  et  $\log Y$  le sont encore.
- - Si  $X, Y, Z, T$  et  $V$  sont des variables aléatoires indépendantes
  - et si  $f$  est **mesurable** de  $\mathbb{R}^3$  vers  $\mathbb{R}$ ,
  - alors  $X$  et  $U = f(Y, Z, T)$  sont indépendantes.
  - De même  $X, g(Y, Z)$  et  $h(T, V)$  sont indépendantes pour des fonctions  $g$  et  $h$  mesurables.

## Démonstration du théorème

Pour toute famille  $(B'_i)_{i=1,\dots,n}$  où  $B'_i \in \mathcal{B}'_i$ , pour tout  $i$ , on a  $\varphi_i^{-1}(B'_i) = B_i \in \mathcal{B}_i$  par mesurabilité des  $\varphi_i$ . Il vient alors :

$$(\varphi_i(X_i))^{-1}(B'_i) = X_i^{-1}(\varphi_i^{-1}(B'_i)) = X_i^{-1}(B_i)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{\varphi \circ X_i \in B'_i\}\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n (\varphi(X_i))^{-1} \in B'_i\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i^{-1}(B_i)\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \in B_i\}\right) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in B_i) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(\varphi(X_i) \in B'_i) \end{aligned}$$

et les  $(\varphi_i(X_i))_{i=1,\dots,n}$  sont bien des v.a. indépendantes.

## Fonction de répartition et indépendance

### Proposition

Deux v.a.r.  $X_1$  et  $X_2$ , définies sur le même espace probabilisé, sont indépendantes si et seulement si la fonction de répartition  $F$  du vecteur  $(X_1, X_2)$  est égale au produit des fonctions de répartition  $F_1$  de  $X_1$  et  $F_2$  de  $X_2$ , c'est-à-dire

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : F(x_1, x_2) = F_1(x_1)F_2(x_2)$$

### Démonstration :

$\Rightarrow$  : Si  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes, on a

$$\mathbb{P}(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2) = \mathbb{P}(X_1 \in B_1)\mathbb{P}(X_2 \in B_2) \quad \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

En prenant  $B_1 = ]-\infty, x_1]$  et  $B_2 = ]-\infty, x_2]$ , on obtient l'équation

$$F(x_1, x_2) = F_1(x_1)F_2(x_2).$$

# Egalité en loi

## Definition

Deux variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  construites respectivement sur  $(\Omega_1, \mathbb{P}_1)$  et  $(\Omega_2, \mathbb{P}_2)$  sont égales en loi si et seulement si elles ont la même loi :

$$\mathbb{P}_{X_1} = \mathbb{P}_{X_2} \quad \text{on note dans ce cas} \quad X_1 \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_2.$$

Cela ne signifie pas que :

- (1)  $X_1 = X_2$  ni même que
- (2)  $\mathbb{P}(X_1 = X_2) = 1$ .