

EXERCICES

Exercice 1

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson $P(\lambda)$ et $P(\mu)$. On note $T=X+Y$.

- 1) Déterminer la loi de T .
- 2) Calculer la loi conditionnelle de X par rapport à « $T=t$ ».

Exercice 2

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire tel que

- la variable aléatoire Y admet pour fonction de densité

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2} & \text{si } y \in]1, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- la fonction de densité conditionnelle de X sachant « $Y=y$ » est

$$f_{X|Y=y}(x) = \begin{cases} y^2 x e^{-yx} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- 1) Quelle est la loi du couple (X, Y) .
- 2) En déduire la loi conditionnelle de Y sachant X .
- 3) Calculer $E(Y | X)$.

Exercice 3

Soient $k \geq 2$ un paramètre et (X, Y) un couple de variables aléatoires de fonction de densité conjointe

$$f(x, y) = \begin{cases} k(k-1)(y-x)^{k-2} & \text{si } 0 < x \leq y < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- 1) Montrer que f est une fonction de densité pour tout paramètre $k \geq 2$.
- 2) Déterminer les deux fonctions de densité marginales.
- 3) Les variables sont-elles indépendantes ?
- 4) Calculer $P(X \leq \frac{1}{4} | Y > \frac{1}{2})$
- 5) Donner la fonction de densité conditionnelle de X par rapport à Y .
- 6) Calculer $E[X | Y]$.
- 7) En déduire $E[X]$.

Exercice 4

Soient X et Y les proportions de sable et de limon dans un sol. On suppose que le couple (X, Y) admet une fonction de densité constante sur le domaine de variation du couple.

- 1) Déterminer la fonction de densité du couple.
- 2) Calculer la probabilité d'avoir plus de sable que de limon.
- 3) Déduire de la question 1 les fonctions de densité marginales.
- 4) Calculer la probabilité d'avoir plus de la moitié de sable.

Exercice 5

Dans une ville américaine où les rues sont soit parallèles, soit perpendiculaires, les interventions d'une caserne de pompiers couvrent une zone qui a été définie comme étant l'ensemble des points de la ville pour lesquels la distance parcourue par les pompiers est inférieure à 2 kilomètres. Si l'on suppose que les incendies se déclarent au hasard dans cette zone, quelle sera la distance moyenne que devront parcourir les pompiers pour atteindre le lieu d'incendie ?

Exercice 6

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires de lois $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ respectivement, et telles que le coefficient de corrélation linéaire entre X_1 et X_2 soit égal à ρ .

- 1) Déterminer la fonction de densité du couple (X_1, X_2) .
- 2) Supposons $\sigma_1^2=1$ et $\sigma_2^2=1$ et notons l'application

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) \mapsto (ax_1, x_2 + b), \text{ où } a > 0 \text{ et } b \in \mathbb{R}.$$

Déterminer la loi du couple $(Y_1, Y_2) = \varphi(X_1, X_2)$.

Exercice 7

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda=1$. On note les variables aléatoires U et V définies par $U=X+Y$ et $V=X/Y$.

- 1) Déterminer la loi du couple (U, V) .
- 2) Les variables U et V sont-elles aussi indépendantes ?

Exercice 8

Soient l'espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) et (X, Y) un couple de variables aléatoires sur cet espace tel que $X \in L^2$ et $Y \in L^2$. Soit $r(y)$ la fonction de régression, c'est-à-dire

$$r : y \mapsto E[X | Y=y].$$

- 1) Montrer que $X-r(Y)$ est une variable aléatoire centrée.
- 2) Montrer que les variables $X-r(Y)$ et $g(Y)$ sont orthogonales et non corrélés.

Exercice 9

Soient l'espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) et (X, Y) un couple de variables aléatoires sur cet espace.

- 1) Montrer le résultat suivant : $|\text{cov}(X, Y)| \leq \sigma_X \sigma_Y$
- 2) Supposons X et Y de coefficient de corrélation c . Montrer que

$$\text{si } c \neq 0 \text{ alors } (\sigma_X - \sigma_Y)^2 \leq \sigma_{X+Y}^2 \leq (\sigma_X + \sigma_Y)^2$$

$$\text{si } c = 0 \text{ alors } \sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$$

Exercice 10

Soit

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{si } 0 < x < 1 \text{ et } y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

la fonction de densité conjointe du vecteur aléatoire (X,Y) .

- 1) Déterminer l'estimateur $g(Y)$ de X , fonction de Y , qui minimise l'erreur quadratique moyenne $E[(X-g(Y))^2]$.
- 2) Calculer l'erreur quadratique moyenne minimale.