

# Feuille d'Exercices du cours 6

## Chaînes de Markov

Vincent Guillemot

19 février 2009

### Probabilités conditionnelles

#### Exercice 1 : Vaccination

1/4 d'une population a été vacciné. Parmi les vaccinés, on compte 1/12 de malades. Parmi les malades, il y a 4 non vaccinés pour 1 vacciné. Quelle est la probabilité pour un non vacciné de tomber malade ?

#### Exercice 2 : Pièces défectueuses

La proportion de pièces défectueuses dans un lot de pièces est de 0,05. Le contrôle de fabrication des pièces est tel que :

- si la pièce est bonne, elle est acceptée avec une probabilité de 0,96 ;
- si la pièce est mauvaise, elle est refusée avec une probabilité égale à 0,98.

On choisit une pièce au hasard et on la contrôle. Quelle est la probabilité

- qu'il y ait une erreur de contrôle ?
- qu'une pièce acceptée soit mauvaise ?

### Chaînes de Markov

#### Exercice 3 : Le temps au pays d'Oz

*Au pays d'Oz, il n'y a jamais deux jours de beau temps de suite. S'il fait beau un jour, il y a autant de chances de pleuvoir que de neiger le lendemain. S'il pleut (ou s'il neige), il y autant de chances d'avoir le même temps le lendemain. Si le temps change de la pluie ou de la neige, le changement vers le beau temps n'arrive que la moitié du temps.*

- Traduire le texte ci-dessus à l'aide d'un dessin faisant apparaître les trois types de temps (notés 1 : beau temps, 2 : pluie et 3 : neige) et les probabilités conditionnelles.
- On pose  $p_{ij}$  la probabilité que demain, on ait le temps  $i$  sachant qu'aujourd'hui on a le temps  $j$ . Montrer que si on a aujourd'hui une probabilité  $\alpha_1$  d'avoir du beau temps,  $\alpha_2$  d'avoir de la pluie et  $\alpha_3$  d'avoir de la neige, alors, demain, les probabilités respectives des trois types de temps sont les coordonnées du vecteur  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P$ .
- On admet l'existence d'une distribution limite (au bout d'un temps infini)  $\Pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ . Montrer que  ${}^t\Pi$  est un vecteur propre de  ${}^tP$  et donner l'expression de  $\Pi$ . Conclure !

#### Exercice 4

Trois jeunes A, B et C jouent au football :

- (i) Si A a la balle, il l'envoie à B avec une probabilité de 0,75 et à C avec une probabilité de 0,25.
- (ii) Si B a la balle, il l'envoie à A avec une probabilité de 0,75 et à C avec une probabilité de 0,25.
- (iii) Si C a la balle, il l'envoie toujours à B.

Soit  $a_n$  la probabilité de l'événement  $A_n$  "après le nième lancer, A a la balle". De même, on définit les probabilités  $b_n$  et  $c_n$ . On suppose qu'au début A possède la balle.

a) Montrez qu'il existe une matrice  $M$  telle que

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n & b_n & c_n \end{bmatrix} M$$

b) La diagonaliser, et calculer  $M^n$  pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ .