

PARTIEL CPI2 (CERGY-PAU)

THERMODYNAMIQUE II

Durée 2 heures

Calculatrices interdites, documents interdits.

Les exercices 1 à 4 sont indépendants.

Document de trois pages.

A-Diffusion thermique

Exercice 1

1. Donner la loi de Fourier : relation entre le vecteur densité de courant thermique diffusif \vec{J}_{dif} et le gradient de la température.

2. On donne l'équation du bilan local d'énergie dans un volume élémentaire (sans production de chaleur) : $\frac{\partial J_{dif}}{\partial x} = -\rho C \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}$ où ρ est la masse volumique et C est la capacité thermique.

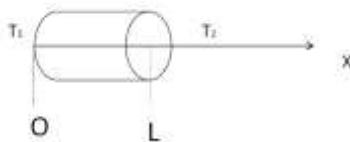
Elle est valable dans le cas monodimensionnel, où la diffusion de la chaleur a lieu suivant l'axe (Ox).

Démontrer cette équation différentielle.

3. À partir de la loi de Fourier et en utilisant l'équation ci-dessus, déduire "l'équation de la chaleur" pour un milieu homogène où la température ne dépend que de la variable x et du temps.

4. On considère une tige homogène cylindrique de longueur L, de section S et dont les extrémités sont maintenues aux températures constantes T_1 et T_2 avec $T_1 < T_2$.

On suppose que la surface latérale est isolée.



4.1 Dans le cas stationnaire, établir l'expression littérale de la température $T(x)$.

4.2 Montre que le vecteur densité de courant thermique \vec{J}_{dif} est uniforme et déterminer son expression.

Exercice 2 : transfert thermique dans un tube

Soit un tube de rayon intérieur r_1 et de rayon extérieur r_2 , infiniment long, de conductivité thermique λ . On donne les températures : $T = T_1$ en $r = r_1$ et $T = T_2$ en $r = r_2$ et on admet qu'un régime stationnaire est établi dans le tube.

On donne le laplacien d'une fonction scalaire $f(r, \theta, z)$ en coordonnées cylindriques :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$



1. L'équation différentielle vérifiée par la température $T(r)$, en coordonnées cylindriques s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T(r)}{\partial r} \right) = 0$$

- 1.1 Préciser quelles sont les hypothèses utilisées pour aboutir à partir de l'équation de diffusion à l'équation ci-dessus.
- 1.2 Résoudre l'équation différentielle ci-dessus et déduire l'expression littérale de la température $T(r)$.
- 1.3 Déterminer l'expression du flux thermique $\phi(r)$ à travers une surface cylindre coaxiale de rayon $r_1 < r < r_2$ et de longueur l .
(le flux thermique $\phi(r)$ est la puissance thermique qui diffuse à travers cette surface).

2. Par analogie avec la loi d'Ohm, la résistance thermique R_{th} du tube est définie par la relation:

$$T_1 - T_2 = R_{th} \phi$$

Déterminer l'expression littérale de la résistance thermique R_{th} .

3. A l'interface entre un solide et un fluide, les échanges thermiques conducto-convectifs obéissent à la loi de Newton : $J_c = h(T_p - T_f)$ où J_c est le vecteur densité de courant

surfacique thermique échangé, entre la paroi à la température T_p et le fluide dont la température loin de la paroi est T_f .

h est le coefficient d'échange convectif, il dépend de la nature du fluide de sa température et du type d'écoulement.

Montrer que la résistance R_C équivalente à l'échange convectif entre une paroi cylindrique de rayon r_2 , de longueur l , à la température T_p et un fluide de température constante et uniforme

T_f est donnée par l'expression : $R_C = \frac{1}{h2\pi r_2 l}$

B-Diffusion de particules

Exercice 3

On considère un barreau cylindrique, infini d'axe (Ox) et de section S. Des particules diffusent à l'intérieur de ce barreau, suivant son axe.

Soit $n(x,t)$ la densité particulaire et D (constant) le coefficient de diffusion des particules dans le barreau.

1. Rappeler la loi de Fick.
2. Donner l'équation de conservation des particules (sans création, ni disparition de particules).
3. Dédurre des questions 1 et 2, l'équation différentielle vérifiée par $n(x,t)$ (équation de diffusion des particules).
4. A $t=0$, on introduit N_0 particules à l'abscisse $x=0$.

Vérifier que : $n(x,t) = \frac{N_0}{S\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$ est solution de l'équation différentielle précédente.

Exercice 4

Le but de cet exercice est de déterminer le coefficient de diffusion du dioxyde de carbone dans l'air. On observe la diffusion unidirectionnelle du dioxyde de carbone dans l'air, en régime stationnaire, à l'intérieur d'un tube de longueur L et de section d'aire S . La densité du courant de dioxyde de carbone vaut $j = \text{constante}$. La densité particulaire du dioxyde de carbone est n_1 à une extrémité du tube et n_2 à l'autre .

1. A partir de l'équation de la diffusion des particules vérifiées par la densité particulaire $n(x,t)$ (sans création de particules), déduire l'expression littérale de $n(x)$ en régime stationnaire.
2. En déduire l'expression littérale du coefficient de diffusion du dioxyde de carbone dans l'air, en fonction des données.

Fin