Thermodynamique 2[1] – Phénomènes de Transfert 2017 – 2018

Devoir surveillé – Diffusion Particulaire[2]

Première Partie : Questions de Cours

1. Donner la définition du flux élémentaire de particules $d\phi_n$ au travers un élément de surface $d\vec{S}$ en fonction du vecteur densité surfacique de courant particulaire $\vec{j_n}$, ainsi que sa dimension $[d\phi_n]$.
2. Donner la définition du flux de particules ϕ_n à travers une surface $\mathcal{S}$, en fonction du vecteur densité surfacique de courant particulaire $\vec{j_n}$, ainsi que sa dimension $[\phi_n]$.
3. Donner la dimension $[\vec{j_n}]$ du vecteur densité surfacique de courant particulaire $\vec{j_n}$.
4. On considère un volume $\mathcal{V}$ délimité par une surface $\mathcal{S}$ qui contient dN particules. Celui ci contient à l'instant t, un nombre de particules donné par $N(t) = \iiint_{\mathcal{V}} n(\vec{r}, t) d\tau$, où $d\tau$ est l'élément différentiel de volume et $n(\vec{r}, t)$ est la densité particulaire. Faire un bilan de matière sur le volume $\mathcal{V}$ i.e. démontrer la Loi de conservation de la matière.
5. Énoncer la Loi de Fick. Donner la dimension $[D]$ du coefficient de diffusion D.
6. À partir des Questions **4.** et **5.**, démontrer l'Équation de diffusion.

Seconde Partie : Problème à Symétrie Sphérique

On considère les coordonnées sphériques (r, θ, φ) et la base locale sphérique $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$. La densité particulaire est notée $n(r, \theta, \varphi, t)$ et le vecteur densité surfacique de courant particulaire $\vec{j_n}(r, \theta, \varphi, t)$. Dans le cadre d'un problème de diffusion particulaire à symétrie sphérique i.e. une sphère diffusante avec une diffusion radiale, la densité particulaire $n(r, t)$ et le vecteur densité de courant particulaire $\vec{j_n}(r, t) = \overline{j}(r, t)\vec{e_r}$ ne dépendent pas des coordonnées θ et φ.

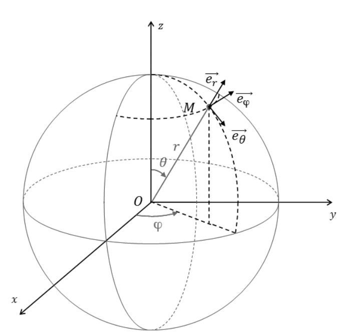

Figure 1: Description des notations utilisées en coordonnées sphériques (r, θ, φ).

Bilan de matière – Soit une coquille sphérique creuse de rayon r et d'épaisseur dr, délimitée par deux sphères $\mathcal{S}_r$ et $\mathcal{S}_{r+dr}$ de rayon r et $r + dr$, respectivement. On note

---

[1] Dimitri Vey, EISTI – Ecole Internationale des Sciences et Techniques de l'Information
[2] Durée 1h – Aucun document n'est autorisé.

$d\mathcal{V}$ le volume de cette coquille sphérique creuse.
1. Donner l'expression du volume $d\mathcal{V}$ en fonction de r et dr.
Bilan temporel – On effectue dans un premier temps un bilan temporel. On note $dN(t)$ et $dN(t+dt)$ le nombre de particules contenues dans le volume $d\mathcal{V}$ à l'instant t et à l'instant $t+dt$, respectivement.
2. Donner l'expresion de $dN(t)$ et $dN(t+dt)$.
3. En déduire la variation $\delta^2 N$ du nombre de particules dans $d\mathcal{V}$ entre les instants t et $t+dt$.
Bilan spatial – On effectue dans un second temps un bilan spatial. On note $dN_e(r)$ le nombre de particules qui traversent la surface $\mathcal{S}_r$ et $dN_s(r+dr)$ le nombre de particules qui traversent la surface $\mathcal{S}_{r+dr}$.
4. Exprimer les flux élémentaires $d\phi_e(r,t)$ et $d\phi_s(r+dr,t)$ au travers un élément de surface $d\vec{\sigma}|_{\theta,\varphi}$ dans un plan parallèle au plan $(\vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$,
5. En déduire les flux $\phi_e(r,t)$ et $\phi_s(r+dr,t)$ au travers les surfaces d'entrée $\mathcal{S}_r$ et de sortie $\mathcal{S}_{r+dr}$
6. Donner l'expression de la variation de particules $\delta^2 N$ dans le volume $d\mathcal{V}$.
Loi de conservation –
7. À partir du bilan temporel et du bilan spatial, donner l'Équation de conservation de la matière.
8. On introduit σ_P et σ_D un nombre de particules produites et détruites par unité de volume et de temps, i.e. $[\sigma_P] = m^{-3} \cdot s^{-1}$ et $[\sigma_D] = m^{-3} \cdot s^{-1}$, respectivement. Écrire dans ce cas le bilan spatial et le bilan temporel et en déduire l'équation de conservation de la matière.

Équation de diffusion

9. Donner la définition intrinsèque de l'opérateur gradient $\vec{\nabla}$ d'une fonction scalaire.
10. À partir de la définition intrinsèque de l'opérateur gradient $\vec{\nabla}$, démontrer son expression en coordonnées sphériques :

$$\vec{\nabla} = \vec{e_r}\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e_\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e_\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

11. En utilisant la Loi de Fick, donner l'expression du vecteur densité de courant particulaire $\vec{j_n}(r,t)$ en fonction du coefficient de diffusion D et de $n(r,t)$.
12. En déduire l'équation de diffusion.
13. Que devient l'équation de diffusion dans le cas du régime permanent ?
14. Le Laplacien en coordonnées sphériques est donné par :

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Retrouver directement l'Équation de la diffusion d'un problème à symétrie sphérique donnée à la Question **12.**.

Troisième Partie : Durée de Vie

La durée de vie d'un microprocesseur est limitée par le phénomène de diffusion. La migration des atomes provoque la destruction des transistors contenus dans la puce. Le coefficient de diffusion D dans le silicium dépend de la température selon la Loi $D = D_\circ e^{-\frac{E}{k_B T}}$ où E est l'énergie du processus, k_B est la constante de Boltzmann et T la température interne du microprocesseur.

1. Donner le temps caractéristique de diffusion τ, en fonction de la longueur caractéristique de la gravure en silicium ℓ, ainsi que de E, T et $D_\circ$.

2. En déduire le rapport $r = \tau_1/\tau_2$ des durées de vie de deux microprocesseurs dont les dimensions de la gravure sont ℓ_1 et ℓ_2 et les températures internes sont T_1 et T_2, respectivement.