# Chapitre 2 : Transferts de chaleur par conduction en régime permanent

Lucie Desplat *

## 1 Les différents modes de transfert de la chaleur

### 1.1 Généralités

Le transfert de chaleur intervient spontanément entre deux systèmes dès qu'il existe entre eux une différence de température et cela quel que soit le milieu, même vide, les séparant.

On distingue trois modes de transmission : la conduction, le rayonnement, la convection, chacun d'eux étant lié à un processus physique bien déterminé. En effet, comme l'énergie thermique d'un milieu matériel représente l'énergie cinétique de ses constituants (molécules, atomes, électrons libres, ...) ces derniers pourront échanger tout ou partie de leur énergie thermique c'est-à-dire gagner ou perdre de l'énergie cinétique :

— Soit par interaction directe avec les particules voisines (chocs de molécules par exemple) ce qui correspond à la conduction,

— Soit par absorption ou émission de radiations électromagnétiques ce qui correspond au rayonnement (non traité dans ce polycopié).

Enfin, dans le cas d'un gaz ou d'un liquide, on considère également, mais cette fois à l'échelle macroscopique, comme un mode de transfert de chaleur appelé convection, les échanges résultant du mélange des diverses parties d'un fluide à des températures différentes.

Il convient de remarquer que dans la réalité, les différents modes de transferts sont souvent intimement liés. Fort heureusement, il est fréquent que l'un des modes soit prépondérant auquel cas les autres modes sont négligés ou bien les différents modes ont une importance comparable mais ils peuvent être découplés ou traités séparément.

### 1.2 Le transfert conductif

#### 1.2.1 Notions qualitatives sur le processus de conduction

Ce mode d'échange tend à une distribution homogène, au sein du milieu matériel, de l'énergie cinétique moyenne des diverses particules par diffusion des zones où la valeur moyenne de cette énergie, donc de la température, est élevée vers les zones où elle est plus faible.
La propagation de la chaleur suivant ce processus se fait au moyen de deux mécanismes bien distincts : une transmission par les vibrations des atomes ou les molécules et une transmission par les électrons libres.

#### 1.2.2 Expression du flux conductif

Soit une surface $S$, intérieure à un matériau soumis à un échange conductif et on désigne par $dQ$ la quantité de chaleur traversant cette surface pendant le temps $dt$. On désigne :

— le flux thermique, la quantité de chaleur transmise par unité de temps soit

$$\Phi = \frac{dQ}{dt} \text{ exprimé en Watt } (1W = J.s^{-1})$$ = puissance thermique

*EISTI

— le vecteur densité de flux thermique (ou vecteur densité de courant thermique) $\vec{j}_{th}$ , la quantité de chaleur transmise par unité de temps et de surface.
En effet, de façon générale, le flux $\Phi$ peut être considéré comme le flux d'un vecteur $\vec{j}_{th}$, vecteur densité de flux thermique , à travers une surface orientée $S$ selon $\vec{n}$, d'où :

$$\Phi = \iint_S \vec{j}_{th}.\vec{n}dS \text{ où } j_{th} \text{ est exprimé en } W.m^{-2}$$

$\vec{j}_{th}$ représente la densité locale du flux thermique au point $M$ et il caractérise en chaque point du milieu la direction, le sens et l'intensité du flux de chaleur.

Connaissant les vecteurs densité de flux $\vec{j}_{th}$, on peut à chaque instant $t$ tracer les courbes tangentes à ces vecteurs : ce sont les lignes de courant.

### 1.2.3 Loi de Fourier

Il existe une relation linéaire entre la densité de flux thermique et le gradient de température, relation connue sous le nom de loi de Fourier :

$$\boxed{\vec{j}_{th} = -k.\overrightarrow{grad}(T)} \qquad (1)$$

Pour un milieu isotrope, la conductivité thermique $k$ est une grandeur scalaire positive, caractéristique du milieu. Elle s'exprime en $W.m^{-1}.K^{-1}$. Dans nos études, on pourra considérer $k$ comme une constante pour un milieu donné.

### 1.2.4 Ordres de grandeur des conductivités thermiques

Alors que l'échelle des conductivités électriques s'étend d'un rapport de 1 à $10^{25}$, celle des conductivités thermiques est beaucoup plus réduite (rapport allant de 1 à $10^4$). On peut toutefois noter une certaine correspondance avec les conducteurs et isolants électriques :

— Parmi les bons conducteurs, il faut citer les métaux en général, le cuivre dont le coefficient à 300 K vaut 400 USI = 400 $W.m^{-1}.K^{-1}$ et l'aluminium (k = 210 USI) en particulier.
— Les aciers sont des conducteurs médiocres de la chaleur ; pour un acier inoxydable courant, la conductivité ne vaut pas plus de 14 USI à 300 K.
— Les verres ont de conductivités de l'ordre de 1 de même que les matériaux réfractaires.
— Les gaz ont des conductivités faibles de l'ordre de quelques $10^{-2}$ USI.

Il semble ainsi que les gaz constituent d'excellents isolants : en fait une restriction fondamentale à leur usage comme isolants thermiques apparaît : c'est le phénomène de convection naturelle.

## 1.3 Le transfert convectif

### 1.3.1 Le phénomène de convection

On distingue traditionnellement la convection forcée de la convection libre (ou naturelle) :

— La convection forcée se produit lorsque le mouvement du fluide est imposé par une action extérieure (par exemple une pompe ou un ventilateur) ; comme les vitesses d'écoulement peuvent atteindre des valeurs très élevées, les transferts par convection forcée sont souvent extrêmement efficaces.
— La convection naturelle apparaît spontanément, sous certaines conditions, dans un fluide au sein duquel existe un gradient de température ; le mouvement des diverses parties résulte simplement de la différence de densité entre les parties chaudes et froides du fluide.

### 1.3.2 Expression du flux surfacique convectif à une paroi

On va introduire par analogie avec la conduction, un coefficient d'échange superficiel $h$ tel que la densité du flux de chaleur $j_{conv}$ à travers un élément de surface de la paroi soit proportionnel à la différence $T_p$ de cet élément de surface et une température locale $T$ caractéristique du fluide :

$$j_{conv} = h(T_p - T_\infty)$$

A travers une surface $S$ de la paroi, le flux est alors donné par :

$$\boxed{\Phi = hS(T_p - T_\infty)} \quad (2)$$

NB : on peut déduire de cette loi de Newton, une expression de la $R_{th}$ de convection puisque par définition $R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi}$ alors $\boxed{R_{th\,conv} = \frac{1}{hS}}$

par cœur

$h$ : coefficient d'échange superficiel

Cette loi est connue sous le nom de loi de Newton.

$h$, exprimé en $W.m^{-2}.K^{-1}$, dépend des conditions expérimentales et particulièrement :
— Des caractéristiques géométriques de la paroi (forme rugosité),
— Des caractéristiques du fluide : masse volumique, viscosité, chaleur spécifique,
— De l'écoulement du fluide : vitesse, nature du régime (turbulent ou laminaire).

A titre indicatif, $h$ atteint suivant le type de convection, la nature du fluide et le régime d'écoulement les ordres de grandeur suivants :

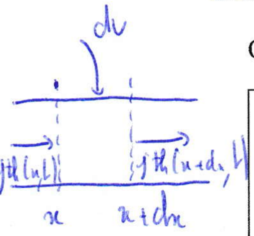
| Type de transfert | fluide | h(W.m$^{-2}$.K$^{-1}$) |
|---|---|---|
| **Convection naturelle** | gaz | 5 – 30 |
| | eau | 100 – 1000 |
| **Convection forcée** | gaz | 10 – 300 |
| | eau | 300 – 12000 |
| | huile | 50 – 1700 |
| | métal liquide | 6000 – 110000 |

## 2 Conduction thermique dans les corps solides

### 2.1 Conduction pure dans un milieu - cas 1D

On se place dans le cas où la température du matériaux ne dépend que de $x$ et de $t$ sans apport d'énergie autre que par conduction.
$\Phi(x,t)$ est le flux thermique traversant une surface de section $S$ normale à l'axe (Ox) orienté selon les $x$ croissants. On a : $\Phi(x,t) = j_{th}(x,t)S$ avec $j_{th}$ la densité de courant thermique, exprimée en $W.m^{-2}$.

On va ici écrire localement la conservation de l'énergie (1er principe de la thermodynamique) :




Dans $dV = Sdx$ (volume infinitésimal de contrôle), on effectue un bilan d'énergie entre les instants $t$ et $t+dt$ :
- en $x$, il entre $\delta Q_e = \phi(x,t)dt = j_{th}(x,t)S\,dt$
- en $x+dx$, il sort de $dV$ $\delta Q_s = j(x+dx,t)S\,dt$

D'après le 1er ppe. de la thermo, la différence de ces 2 valeurs est égale à la variation d'énergie interne $dU$ du volume étudié :

$dU = \delta Q_e - \delta Q_s = -\frac{\partial j_{th}}{\partial x} dx\,S\,dt$ or $dU = CdT$ avec $C$ : capacité thermique ($J.K^{-1}$)

$dU = \rho c S dx dT$ ($\rho$ : masse volumique) $C = \rho c S dx$ avec $c$ : capacité thermique massique ($J.K^{-1}.kg^{-1}$)

Et $dT = \frac{\partial T}{\partial t} dt$ Ainsi

$$-\frac{\partial j}{\partial x} dx\,S\,dt = \rho c S dx \frac{\partial T}{\partial t} dt \Rightarrow \underline{-\frac{\partial j_{th}}{\partial x} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}}$$

Ainsi, on obtient la relation suivante :

$$\boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_{th}}{\partial x}} \tag{3}$$

En utilisant la loi de Fourier, il vient :

$$\left.\begin{array}{l} * \ \rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = -\dfrac{\partial j_{th}}{\partial x} \\ * \ j_{th} = -k \dfrac{\partial T}{\partial x} \end{array}\right\} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = +k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \iff \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Finalement on a établi l'équation de chaleur - 1D :

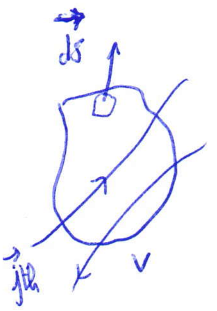
$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} \tag{4}$$

avec $\alpha = \dfrac{k}{\rho c}$

## 2.2 Conduction pure dans un milieu - cas 3D

coordonnées

On considère le cas le plus général où la température $T$ dépend des trois coordonées d'espace. On isole un volume $V$ du milieu conducteur (thermique) et l'on effectue un bilan d'énergie. Au passage, on a $\Phi = \oiint \vec{j}_{th}.\vec{dS}$.




Pendant $dt$, $V$ reçoit $\delta Q = -\phi dt$

Le bilan d'énergie donne $dU = \delta Q = -\phi dt$

$$* \ dU = \iiint_V \rho c \, dT \, d\tau = \left[\iiint_V \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\tau\right] dt \quad \text{Et} \quad \phi = \oiint_\Sigma \vec{j}_{th} \cdot \vec{dS} = \iiint_V \mathrm{div}\, \vec{j}_{th} \, d\tau$$

Ainsi $\displaystyle\iiint_V \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\tau = \iiint_V \left(-\mathrm{div}\, \vec{j}_{th}\right) d\tau$ valable $\forall V$ : $\rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = -\mathrm{div}\, \vec{j}_{th}$

Ainsi, on obtient la relation suivante qui correspond au bilan local d'énergie :

$$\boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + div \vec{j}_{th} = 0} \tag{5}$$

En utilisant la loi de Fourier, il vient :

$$\left.\begin{array}{l} \rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = -\mathrm{div}\, \vec{j}_{th} \\ \vec{j}_{th} = -k \, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, T \end{array}\right\} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = +k \Delta T \qquad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \Delta T$$

Finalement on a établi l'équation de chaleur - 3D :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \Delta T} \quad (6)$$

avec $\alpha = \dfrac{k}{\rho c}$

# 3 Résistance thermique

## 3.1 Analogie résistance électrique - résistance thermique

Lors de l'étude des phénomènes conductifs **en régime permanent et dans des systèmes unidimensionnels**, le concept de résistance thermique est très fréquemment utilisé car il facilite la résolution.

Ce concept repose sur l'analogie formelle qu'il est possible d'établir entre les lois de l'électrocinétique et celles de la thermique.

A la loi d'Ohm locale relative à la conduction électrique que l'on rappelle ici :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = -\sigma \overrightarrow{grad} V \quad (7)$$

Avec :
- $\vec{j}$ : le vecteur densité de courant électrique
- $\sigma$ : la conductivité électrique
- $V$ : le potentiel électrique

on peut en effet associer, par analogie, la loi de Fourier :

$$\vec{j}_{th} = -k \overrightarrow{grad} T$$

De même, à l'intensité de courant électrique traversant une surface (S) donnée,$I = \iint_{(S)} \vec{j}.\vec{dS}$ correspond le flux de chaleur traversant par conduction thermique une surface (S), à savoir :

$$\Phi = \iint_{(S)} \vec{j}_{th}.\vec{n} dS$$

Cette analogie est très souvent exploitée en transposant un problème thermique en un problème électrique plus facile à traiter expérimentalement. La comparaison entre les lois précédentes montre que les températures jouent en thermique un rôle équivalent à celui des potentiels électriques tandis que les flux de chaleur sont les homologues des intensités de courant.

A la résistance électrique, $R_e$, définie par : $V_1 - V_2 = R_e I$, on associe donc par analogie la résistance thermique $R_{th}$ définie par :

$$\boxed{T_1 - T_2 = R_{th} \Phi} \quad (8)$$

IMPORTANT POUR LES EXOS DE TD.

$R_{th}$ s'exprime en $K.W^{-1}$.

## 3.2 Association de résistances thermiques

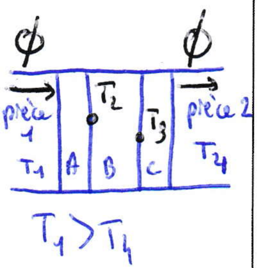
Comme pour les résistances électriques, les résistances thermiques peuvent être associés.

### 3.2.1 Association de résistances en série

Soit un mur plan constitué de $n$ couches de matériaux différents en série. La résistance thermique équivalente est égale à la somme des résistances thermiques :

$$R_{eq} = \sum_i R_i \tag{9}$$

**Démonstration à travers un exemple :**




Soit un mur constitué de 3 matériaux distincts A, B et C, d'épaisseur $e_a, e_b$ et $e_c$ et de Rth respectives $Rth_A$, $Rth_B$ et $Rth_C$.
Les 3 murs sont traversés par le même flux $\phi$. Ainsi on a :
- pour la couche A : $T_1 - T_2 = Rth_A \phi$
- pour la couche B : $T_2 - T_3 = Rth_B \phi$
- " " " C : $T_3 - T_4 = Rth_C \phi$

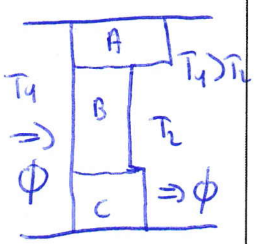
Il vient : $T_1 - T_4 = (Rth_A + Rth_B + Rth_C)\phi$

### 3.2.2 Association de résistances en parallèle

Soit un mur plan constitué de $n$ couches de matériaux différents en parallèle. L'inverse de la résistance thermique équivalente est égale à la somme des inverses des résistances thermiques.

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_i \frac{1}{R_i} \tag{10}$$

**Démonstration à travers un exemple :**




Soit un mur qui sépare 2 pièces de températures $T_1$ pour la pièce 1, $T_2$ pour la pièce 2.
Ce mur est constitué de 3 matériaux A, B, C.

On a : $T_1 - T_2 = Rth_A \phi_A$, $T_1 - T_2 = Rth_B \phi_B$, $T_1 - T_2 = Rth_C \phi_C$

Et $\phi = \phi_A + \phi_B + \phi_C$

Ainsi

$$\phi = (T_1 - T_2)\underbrace{\left(\frac{1}{Rth_A} + \frac{1}{Rth_B} + \frac{1}{Rth_C}\right)}_{\frac{1}{Rth\ \text{équivalent}}}$$

## Références

[1] Abdelaziz Boumiz, *Polycopié de Thermodynamique II*, EISTI

[2] Jean-Marie Brébec, Thierry Desmarais, Alain Favier, Marc Ménétrier, Bruno Noël, Régine Noel, Claude Orsini, Jean-Marc Vanhaecke, *Thermodynamique 2e année MP-MP*/PC-PC*/PSI-PSI*/PT-PT* - H Prépa*