

# Fonctions de plusieurs variables

En première année on a étudié les fonctions  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . La première généralisation est d'étudier les fonctions d'une variable réelle à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie ( $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ , par exemple  $\mathbb{C}$ ) ; on parlera de fonctions vectorielles. La seconde généralisation sera de parler de fonctions définies sur une partie d'un espace vectoriel de dimension finie à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou dans  $\mathbb{C}$ , ou même dans un espace vectoriel de dimension finie on parlera dans ce cas là de fonction de plusieurs variables.

Si  $f$  est une application d'une partie de  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$  on rencontre les cas particuliers suivants :

- $n = 1$  et  $p = 2$  ou  $p = 3$  donc  $f$  est une application de  $I \subset \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ , on peut interpréter  $f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$  comme les coordonnées d'un point, il s'agit d'une courbe paramétrée, ou comme les coordonnées d'un vecteur.
- $n = 2$  ou  $n = 3$  et  $p = 1$  à un point de coordonnées  $x = (x_1, x_2)$  par exemple on associe un réel  $f(x)$  : c'est un champ scalaire.
- $n = 2$  ou  $n = 3$  et  $p = 2$  ou  $p = 3$  à un point de coordonnées  $x = (x_1, x_2)$  on associe un vecteur  $f(x)$  : c'est un champ de vecteurs.

## I. Espaces vectoriels normés (E.V.N.)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel.  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### I.1. Norme et distance

Déf 1 : On dit qu'un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel est normé ssi on a défini une application de  $E$  dans  $\mathbb{R}_+$  noté  $\|\cdot\|$  telle que :

$\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R}_+$   
 $x \mapsto \|x\|$  vérifiant les 3 axiomes suivants :

1.  $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2.  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3.  $\forall x, y \in E \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Une application vérifiant les 3 axiomes précédents s'appelle une norme.

Conséquence :  $\forall x, y \in E \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\| \Rightarrow$  l'application norme est 1-lipschitzienne

et donc elle est continue sur  $E$ .

Démo :  $\forall x \in E \ x = x - y + y \Rightarrow \|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$   
 $\Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$   
 $y = y - x + x \Rightarrow \|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\| = \|x - y\| + \|x\|$   
 $\Rightarrow \|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$

1 et 2  $\Rightarrow \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|$

Def 2 : On appelle espace métrique ou espace métrisable, un ensemble d'éléments appelés points,

sur lequel on a défini une distance  $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$   
 $(x, y) \mapsto d(x, y)$   $d$  vérifie 3 axiomes :

1.  $\forall x, y \in E, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2.  $\forall x, y \in E, d(x, y) = d(y, x)$
3.  $\forall x, y, z \in E, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  inégalité triangulaire

### I.2. Distance associée à une norme

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$  e.v.n. (espace vectoriel normé).

À la norme  $\|\cdot\|$  de  $E$  on associe une distance  $d$  de la manière suivante :

$$d: E \times E \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto d(x, y) = \|x - y\|$$

$d$  est-elle une distance ?

- 1°)  $\forall x, y \in E, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$
- 2°)  $\forall x, y \in E, d(x, y) = \|x - y\| = \|y - x\| = d(x, y)$
- 3°)  $\forall x, y, z \in E, d(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)$

Donc  $d$  est une distance.

**Propriétés** :  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, d(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda x - \lambda y\| = \|\lambda(x - y)\| = |\lambda| d(x, y)$   
 $\forall x, y, z \in E, d(x + y, z + y) = \|x + y - (z + y)\| = \|x - z\| = d(x, z)$

**Exemple** :  $\|\cdot\|_\infty: E \rightarrow \mathbb{R}_+$   
 $f \mapsto \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$   $E =$  e.v. de fonctions continues sur  $[0,1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Norme dite de convergence uniforme ou la norme infinie.

1.  $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [0,1] |f(t)| = 0$  car  $\forall t \in [0,1] 0 \leq |f(t)| \leq \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$   
 $\Leftrightarrow \forall t \in [0,1] f(t) = 0$   
 $\Leftrightarrow f = (0)$  fonction nulle sur  $[0,1]$
2.  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in E, \|\lambda f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |\lambda f(t)| = \sup_{t \in [0,1]} (|\lambda| |f(t)|) = |\lambda| \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| = |\lambda| \|f\|_\infty$
3.  $\forall f, g \in E, \|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$   
 $\forall t \in [0,1] |f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)| \leq \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| + \sup_{t \in [0,1]} |g(t)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$  (constante)

On a alors démontré  $\forall t \in [0,1] |f(t) + g(t)| \leq A \Rightarrow \sup_{t \in [0,1]} |f(t) + g(t)| \leq A$

C'est à dire :  $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

### I.3. Normes équivalents

**Def** : Soient  $N_1$  et  $N_2$  deux normes de l'e.v.n.  $E$

$N_1$  est équivalente à  $N_2$  ssi  $\exists \alpha, \beta > 0$  tq  $\forall x \in E, \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$ .

Si  $E = \mathbb{R}^n$  alors on définit les trois normes équivalents usuelles :  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

$$N_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto N_1(x) = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad ; \quad N_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto N_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad ; \quad N_3: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto N_3(x) = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

(norme euclidienne)

### I.4. Boules, sphères

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  e.v.n. ;  $a \in E, r \in \mathbb{R}_+$

**Def** : On appelle boule ouverte de centre  $a$  et de rayon  $r$  et on note  $\mathcal{B}_o(a, r)$  l'ensemble :

$$\mathcal{B}_o(a, r) = \{x \in E, d(a, x) < r\}$$

$$\mathcal{B}_f(a, r) = \{x \in E, d(a, x) \leq r\}$$
 boule fermée de centre  $a$  et de rayon  $r$ .
$$\mathcal{S}(a, r) = \{x \in E, d(a, x) = r\}$$
 sphère de centre  $a$  et de rayon  $r$ .

### I.5. Voisinages, ouverts et fermés

**Voisinage** : Un voisinage de  $a$  dans l'espace métrique  $(E, d)$  noté  $V(a)$

est une partie de  $E$  contenant au moins une boule ouverte  $\mathcal{B}_o(a, r)$ .

**Def 2** : Un espace est dit séparable ou séparé ssi  $\forall a, b \in E, a \neq b, \exists V(a)$  et  $\exists V(b)$  tq  $V(a) \cap V(b) = \emptyset$ .

**Exemple** : Un espace métrique est séparable.

En effet, soit  $a, b \in E$  avec  $a \neq b$  on choisit  $V(a) = \mathcal{B}_o(a, \frac{d(a,b)}{4})$  ; et  $V(b) = \mathcal{B}_o(b, \frac{d(a,b)}{4})$ .

Supposons qu'il existe  $x \in V(a) \cap V(b)$  alors  $d(a, x) < \frac{d(a,b)}{4}$  et  $d(b, x) < \frac{d(a,b)}{4}$  or d'après l'inégalité triangulaire  $d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < \frac{d(a,b)}{4} + \frac{d(a,b)}{4} \Rightarrow d(a, b) < \frac{d(a,b)}{2}$  ce qui est impossible donc  $V(a) \cap V(b) = \emptyset$ .

**Ouverts** :  $\mathcal{O}$  est un ouvert de  $(E, \|\cdot\|) \Leftrightarrow \mathcal{O}$  est voisinage de chacun de ses points  $\Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{O}, \exists \mathcal{B}_o(x, r) \subset \mathcal{O}$ .

En particulier  $\emptyset$  et  $E$  sont des ouverts de  $E$ .

**Fermés** :  $\mathcal{F}$  est fermé de  $(E, \|\cdot\|)$  ssi  $\mathcal{C}_E \mathcal{F}$  (complément de  $\mathcal{F}$  dans  $E$ ) est un ouvert de  $E$ .

**Propriétés** : Une intersection infinie d'ouverts n'est pas un ouvert.

En effet  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left( ]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[ \right) = \{0\}$  et  $\{0\}$  n'est pas un ouvert car son complémentaire dans  $\mathbb{R}$  est  $] -\infty, 0[ \cup ] 0, +\infty[$  n'est pas un fermé de  $\mathbb{R}$  (c'est un ouvert).

## I.6. Intérieur et adhérence

### I.6.1. Intérieur

**Def** : Soit  $\mathcal{P}$  une partie d'un e.v.n.  $(E, \|\cdot\|)$ . On dit qu'un point  $a$  de  $E$  est intérieur à  $\mathcal{P}$  ssi  $\mathcal{P}$  est un voisinage de  $a$  c'est à dire ssi  $\exists r > 0$  tq  $\mathcal{B}_o(a, r) \subset \mathcal{P}$ .

L'ensemble des points intérieurs à  $\mathcal{P}$  est appelé intérieur de  $\mathcal{P}$  et on le note  $\overset{\circ}{\mathcal{P}}$ .

**Remarque** :  $\overset{\circ}{\mathcal{P}}$  peut être, par exemple  $\mathcal{P} = \{a\} \Rightarrow \overset{\circ}{\mathcal{P}} = \emptyset$ .

**Théorème** : L'intérieur de  $\mathcal{P}$  est le plus grand ouvert (au sens de l'inclusion) contenu dans  $\mathcal{P}$  donc  $\overset{\circ}{\mathcal{P}} \subset \mathcal{P}$ .

**Démo** :  $\overset{\circ}{\mathcal{P}}$  est un ouvert de  $(E, \|\cdot\|) \Leftrightarrow \overset{\circ}{\mathcal{P}}$  est voisinage de chacun de ses points (prouvons-le).

Soit  $x \in \overset{\circ}{\mathcal{P}}$ , par définition  $x$  est un point intérieur à  $\mathcal{P}$  donc il existe  $\mathcal{B}_o(x, r)$  tq  $\mathcal{B}_o(x, r) \subset \mathcal{P}$  mais la boule ouverte est un ouvert (voir TD)  $\Rightarrow \forall y \in \mathcal{B}_o(x, r), \exists \mathcal{B}_o(y, r) \subset \mathcal{B}_o(x, r) \subset \mathcal{P}$  d'où  $\forall y \in \mathcal{B}_o(x, r), y$  est un point intérieur à  $\mathcal{P}$ , c'est à dire  $\mathcal{B}_o(x, r) \subset \overset{\circ}{\mathcal{P}}$  ainsi  $\overset{\circ}{\mathcal{P}}$  est un ouvert.

$\overset{\circ}{\mathcal{P}}$  est le plus grand ouvert inclus dans  $\mathcal{P}$ , en effet soit  $\mathcal{O}$  un ouvert quelconque inclu dans  $\mathcal{P}$  est-ce que  $\mathcal{O} \subset \overset{\circ}{\mathcal{P}}$  ?

La réponse est oui, même démonstration que précédemment en remplaçant  $\mathcal{B}_o(x, r)$  par  $\mathcal{O}$ .

**Théorème 2** : Une partie  $\mathcal{P}$  de  $E$  est ouverte ssi  $\mathcal{P} = \overset{\circ}{\mathcal{P}}$ .

**Démo** : Soit  $\mathcal{P}$  ouvert alors on sait que  $\overset{\circ}{\mathcal{P}} \subset \mathcal{P}$ .

Mais  $\overset{\circ}{\mathcal{P}}$  est le plus grand ouvert inclus dans  $\mathcal{P}$  et comme  $\mathcal{P}$  est ouvert alors  $\mathcal{P} \subset \overset{\circ}{\mathcal{P}}$  donc  $\mathcal{P} = \overset{\circ}{\mathcal{P}}$ .

**Exemple** :  $E = \mathbb{R}$ , les ouverts de  $\mathbb{R}$  sont des intervalles ouverts de  $\mathbb{R}$ .

$]1,2[$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $[2,3]$  fermé car  $[2,3]^c = ]-\infty, 2[ \cup ] 3, +\infty[$ .

$]1,2[$  n'est ni un ouvert ni un fermé de  $\mathbb{R}$ .

Si  $A = [a, b] \Rightarrow \overset{\circ}{A} = ]a, b[$  ;  $A = [1, 2[ \Rightarrow \overset{\circ}{A} = ]1, 2[$  ;  $A = ]1, 2[ \Rightarrow \overset{\circ}{A} = A$ .

Si  $A = \mathbb{Q} \Rightarrow \overset{\circ}{A} = \emptyset$  en effet si  $x \in \overset{\circ}{\mathbb{Q}} \Leftrightarrow \mathbb{Q}$  voisinage de  $x \Leftrightarrow \mathbb{Q}$  contient au moins un intervalle de centre  $x$  et de rayon  $r > 0$  c'est à dire  $]x - r, x + r[ \subset \mathbb{Q}$  ceci est impossible car il existe des irrationnels dans  $]x - r, x + r[ \Rightarrow ]x - r, x + r[ \not\subset \mathbb{Q}$ .

De même  $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow \overset{\circ}{A} = \emptyset$ .

### I.6.2. Adhérence

**Def** : Un point  $a$  de  $E$  est dit adhérent à une partie de  $P$  de  $E$  ssi tout voisinage de  $a$  rencontre  $P$ .

On note  $V(a)$  l'ensemble des voisinages de  $a$  d'où  $a$  est adhérent à  $P \Leftrightarrow \forall v \in V(a), v \cap P \neq \emptyset$ .

**Def** : L'ensemble des points adhérents à une partie de  $P$  est dit adhérent ou fermeture de  $P$  et on le note  $\bar{P}$ .

**Théorème** :

1. L'adhérence de  $P$  est le plus petit fermé contenant  $P$ .
2. Une partie de  $P$  de  $E$  est fermé ssi  $\bar{P} = P$ .

**Exemple** :  $E = \mathbb{R}$  ;  $\overline{]a, b[} = [a, b]$  ;  $\overline{]a, b]} = [a, b]$

$\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$  en effet soit  $x_0 \notin \mathbb{N}$  alors  $\exists n \in \mathbb{N}$  tq  $n < x_0 < n + 1$  alors  $\exists \alpha > 0$  tq  $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[ \cap \mathbb{N} = \emptyset \Rightarrow x_0 \notin \overline{\mathbb{N}}$ .

De même  $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ .

$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$  en effet soit  $x_0 \notin \mathbb{Q} \forall \varepsilon > 0, ]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[ \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset \Rightarrow x_0 \in \overline{\mathbb{Q}}$ . On dit  $\mathbb{Q}$  dense dans  $\mathbb{R}$ .

De même  $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ .

## II. Suites d'un espace topologique

Soit  $(E, d)$  un espace métrique.

**II.1. Def** :

1. On appelle suite d'un  $\mathbb{R}$  e.v.n.  $(E, \|\cdot\|)$  toute application de  $\mathbb{N}$  dans  $E$  et on la note  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
2. On dit qu'une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée ssi  $\exists M > 0$  tq  $\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| \leq M$  c'est à dire  $x_n \in \mathcal{B}_o(\mathcal{O}, M)$ .
3. On dit que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$  ssi  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, \|x_n - l\| < \varepsilon$ .  
 $\Leftrightarrow \forall \mathcal{B}_o(l, \varepsilon), \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, x_n \in \mathcal{B}_o(l, \varepsilon)$   
 $\Leftrightarrow \forall V \in V(l), \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, x_n \in V$

**Remarque** : Si on a défini une distance  $d$  sur  $E$  alors  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$  ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0 d(x_n, l) < \varepsilon, \quad \text{c'est à dire } d(x_n, l) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

**Def** : Soit  $l \in E$ ;  $(E, d)$  espace métrique, on dit que  $l$  est valeur d'adhérence de la suite  $(x_n)$  ssi :

- $\forall \varepsilon > 0, \{n \in \mathbb{N} \text{ tq } d(x_n, l) < \varepsilon\}$  est infini
- $\forall V \in V(l), \{n \in \mathbb{N} \text{ tq } x_n \in V\}$  est infini

## II.2. Propriétés de la limite

**Théorème** : Si une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $(E, d)$  admet une limite alors cette limite est unique.

**Démo** :  $E$  est séparé donc  $\forall a, b \in E, \exists V \in V(a)$  et  $W \in V(b)$ , tq  $V \cap W = \emptyset$ .  
avec  $a \neq b$

Supposons que  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$  et  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} b$  avec  $a \neq b$ .

Mais  $\left. \begin{array}{l} x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_1, x_n \in V \\ x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} b \Rightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_2, x_n \in W \end{array} \right\} \Rightarrow \forall n \geq \text{Sup}(n_1, n_2) \text{ alors } x_n \in V \cap W$  contradiction avec  $V \cap W = \emptyset$ . Donc nécessairement  $a = b$ .

**Théorème** : Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$  alors  $a$  est l'unique valeur d'adhérence de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Démo** : On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$  alors  $\forall V \in V(a), \exists n_1 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_1, x_n \in V$ .  
 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_1, d(x_n, a) < \varepsilon$   
 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \{n \in \mathbb{N} / d(x_n, a) < \varepsilon\}$  est infini  
 $\Leftrightarrow a$  est une valeur d'adhérence de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Soit  $b$  une autre valeur d'adhérence de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $a \neq b$  alors  $\forall W \in V(b), \{n \in \mathbb{N} / x_n \in W\}$  est infini. (\*)

Or  $E$  est séparé, c'est à dire  $\forall V \in V(b)$  tq  $V \cap W = \emptyset$ .

Mais on sait que pour  $n \geq n_1, x_n \in V$  (car  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ )  $\Rightarrow$  pour  $n \geq \text{Sup}(n, n_2)$  on aura  $x_n \in V \cap W$  impossible car  $V \cap W = \emptyset$ .

(\*) implique pour  $n \geq n_2, x_n \in W$ .

### II.3. Relation entre les différents emplois du mot adhérence

Soit  $A$  une partie de  $(E, d)$  métrique.

Soit  $B = \{\text{valeurs d'adhérence de toutes les suites de } A\}$

Soit  $C = \{\text{limite des suites convergentes de } A\}$

Alors  $A = B = C$ .

**Corollaire** :  $A$  est fermé ( $\bar{A} = A$ ) ssi pour toute suite de points de  $A$  qui converge dans  $E$ , sa limite appartient à  $A$ .

**Exemple d'application** : Soit  $E = \mathbb{R}, A = \mathbb{Q}$ .

Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathbb{Q}$ .

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

Or  $e \in \mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{Q}$  n'est pas un fermé de  $\mathbb{R}$ .

### III. Limite

**Def** : Soit  $f$  définie sur  $A \subset E$  e.v.n. et soit  $a \in \bar{A}$ .

On dira que  $f$  admet la limite  $l$  pour  $x$  tendant vers  $a$  ssi  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, x \in \mathcal{B}_o(0, \eta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{B}_o(l, \varepsilon)$ .

Cette définition peut se traduire en terme de distance ou de norme :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall x \in A, \|x - a\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - l\| < \varepsilon.$$

**Théorème** : Une fonction  $f$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$  a pour limite  $l = (l_1, \dots, l_p)$  quand  $x \rightarrow a$

ssi les fonctions composantes  $f_i$  de  $f$  ont pour limite  $l_i$  quand  $x \rightarrow a$ .

**Démo** :  $f: E \rightarrow \mathbb{R}^p$   
 $x \mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$

Choisissons la norme euclidienne.

$$\text{On a } \|f(x) - l\| = \sqrt{\sum_{i=1}^p (f_i(x) - l_i)^2} \leq \sqrt{p \sup_{1 \leq i \leq p} (f_i(x) - l_i)^2} = \sqrt{p} \sup_{1 \leq i \leq p} |f_i(x) - l_i|.$$

Supposons que pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = l_i$  d'où  $\forall \varepsilon > 0$  tq  $\forall x \in A, \|x - a\| < r_i \Rightarrow |f_i(x) - l_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{p}}$ .

Soit  $r = \inf_{1 \leq i \leq p} r_i$  d'où  $\forall \varepsilon > 0, \exists r$  tq  $\forall x \in A, \|x - a\| < r \Rightarrow \|f(x) - l\| \leq \sqrt{p} \sup |f_i(x) - l_i| \leq \sqrt{p} \frac{\varepsilon}{\sqrt{p}}$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ . Supposons que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  alors on montre que  $\lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = l_i$

On sait que  $\forall \varepsilon > 0, \exists r$  tq  $\forall x \in A, \|x - a\| < r \Rightarrow \|f(x) - l\| < \varepsilon$

d'où  $\forall \varepsilon > 0, \exists r$  tq  $\forall x \in A, \|x - a\| < r \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, |f_i(x) - l_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^p (f_i(x) - l_i)^2} = \|f(x) - l\| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = l_i$

**Exemple** :  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto f(x) = (f_1(x), f_2(x))$  avec  $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x = (x_1 \ x_2 \ x_3)$ .  
 $f_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3$   
 $f_2(x) = \ln(1 + x_1^2 + x_2^2)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \left( \lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) \right) = (0 \ 0)$$

## IV. Continuité

**IV.1. Def 1** : Soit  $f$  définie sur  $A$  et  $a \in A$ .

On dit que  $f$  est continue en  $a$  ssi  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

C'est à dire  $\forall \varepsilon > 0, \exists \mu > 0$  tq  $\forall x \in A, \|x - a\| < \mu \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$ .

**Def 2** :  $f$  est continue sur  $A$  ssi elle est continue en tout point de  $A$ .

**Théorème** :  $f$  est continue en  $a$  ssi pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $A$  convergeant vers  $a$ , la suite  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f(a)$ .

**Démo** : Supposons  $f$  continue en  $a$ . Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite convergeant vers  $a \in A$ , d'où on a :

1.  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall x \in A \|x - a\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$  continuité de  $f$  en  $a$ .

2.  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0 \|x_n - a\| < \varepsilon$  (la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $a$ )

Si  $\varepsilon = \eta$  alors  $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0 \|x_n - a\| < \varepsilon \Rightarrow \|f(x_n) - f(a)\| < \varepsilon$  c'est à dire  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ .

**Réciproquement** on la prouve par contraposition :

Supposons que  $f$  ne tende pas vers  $f(a)$  quand  $x \rightarrow a$ .

Alors  $\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in A$  tq  $\|x - a\| < \eta$  et  $\|f(x) - f(a)\| \geq \varepsilon$ .

Prenons pour  $\eta$  les valeurs successives  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

On va construire ainsi une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant :

$$\|x_1 - a\| < 1 \text{ c'est à dire } x_1 \in \mathcal{B}_o(a, 1) \text{ tq } f(x_1) \notin \mathcal{B}_o(f(a), \varepsilon)$$

$$\|x_2 - a\| < \frac{1}{2} \text{ c'est à dire } x_2 \in \mathcal{B}_o(a, \frac{1}{2}) \text{ tq } f(x_2) \notin \mathcal{B}_o(f(a), \varepsilon)$$

⋮

$$\|x_n - a\| < \frac{1}{n} \text{ c'est à dire } x_n \in \mathcal{B}_o(a, \frac{1}{n}) \text{ tq } f(x_n) \notin \mathcal{B}_o(f(a), \varepsilon)$$

On va construire une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers  $a$  et telle que  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  ne converge pas vers  $f(a)$ .

**Remarques** :

1. Toute application de  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  qui est une fonction polynomiale de  $n$  variables est continue.

**Exemple** :  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y, z) \mapsto x^3 + 2x^2y + y^3 + xyz$

2. Toute fraction rationnelle est continue sur toute partie de  $\mathbb{R}^n$  où son dénominateur ne s'annule pas.

**Exemple** :  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y, z) \mapsto \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2 + z^2}$

**Exemple** :

1. Soit  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\begin{cases} f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$ .

Tous les chemins mènent à Rome : il existe une infinité de chemins pour approcher de 0 : on peut emprunter la première bissectrice, la parabole comme un tobogan. Pour s'en sortir on utilise les majorations.

Montrons que  $f$  est continue en  $(0, 0)$ .

On a  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$   $0 \leq |f(x, y)| = \left| \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \right| = |x| \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq |x| \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0 = f(0, 0) \Rightarrow f$  est continue en  $(0, 0)$ .

Autre façon : Utiliser les coordonnées polaires :  $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$

$$\Rightarrow f(x, y) = \frac{r \cos(\theta) r^2 \sin^2(\theta)}{r^2} = r \cos(\theta) \sin^2(\theta)$$

$\Rightarrow 0 \leq |f(x, y)| = |r \cos(\theta) \sin^2(\theta)| \leq r \xrightarrow{(r, \theta) \rightarrow (0, 0)} 0 = f(0, 0) \Rightarrow f$  est continue en  $(0, 0)$ .

2. Soit  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\begin{cases} f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ sur } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$ .

Si  $y = x^2$  :  $f(x, x^2) = \frac{x x^2}{x^2+x^2} = \frac{x^3}{2x^2} \sim \frac{x^3}{x^2} = x \rightarrow 0 = f(0, 0)$ .

Si  $y = x$  :  $f(x, x) = \frac{xx}{x^2+x^2} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0 = f(0, 0)$ .  
 $\Rightarrow f$  n'est pas continue en  $(0, 0)$ .

Autre façon :

Soit la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $v_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ . On a alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = (0, 0)$ .

De plus  $f(v_n) = f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{\frac{1}{n} \frac{1}{n}}{(\frac{1}{n})^2 + (\frac{1}{n})^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow f(v_n) \not\rightarrow 0 = f(0, 0) \Rightarrow f$  n'est pas continue en  $(0, 0)$ .

## IV.2. Continuité uniforme

**Def** :  $(E, d), (F, \delta)$  deux espaces métriques

$f: E \rightarrow F$  est uniformément continue sur  $E$  ssi  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, x' \in E, d(x, x') < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(x')) < \varepsilon$ .

**Remarque** :

1. Si  $f$  est uniformément continue sur  $E$  alors  $f$  est continue sur  $E$ .

**Rappel** :  $f$  est continue en un point  $x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in E, d(x, x_0) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ .

Si  $f$  est uniformément continue sur  $E$  alors  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, x' \in E, d(x, x') < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(x')) < \varepsilon$ .

Il suffit de fixer  $x' = x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in E, d(x, x_0) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \Rightarrow f$  est continue en  $x_0$ .

2.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto x^2$   $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  mais  $f$  n'est pas uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ .

**Démo** : Supposons  $f$  uniformément continue sur  $\mathbb{R}$  alors

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall x, x' \in \mathbb{R} |x - x'| < \eta \Rightarrow |x^2 - x'^2| < \varepsilon$ .

Or  $|x^2 - x'^2| = |(x - x')(x + x')|$  on pose  $x = x' + h$  alors  $|x^2 - x'^2| = |h(2x' + h)|$ .

Donc si  $f$  était uniformément continue sur  $\mathbb{R}$  on aurait  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall x' \in \mathbb{R}$  dès que  $|h| < \eta$

$\Rightarrow |h(2x' + h)| < \varepsilon$  si  $h > 0 \Rightarrow \forall x' \in \mathbb{R} h > \eta \Rightarrow x' < (\frac{\varepsilon}{h} - h) \frac{1}{2}$  impossible.

$\Rightarrow f$  ne peut pas être uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ .

**Def** :  $f$  est une isométrie ssi  $\forall x, x' \in \mathbb{R}, d(x, x') = \delta(f(x), f(x'))$ .

**Def** : Soit  $f: (E, d) \rightarrow (F, \delta)$  est dite lipschitzienne ssi  $\exists k > 0$  tq  $\forall x, x' \in E, \delta(f(x), f(x')) \leq K d(x, x')$ .

Si  $K \in ]0, 1[$  alors  $f$  est dite contractante.

**Théorème** : Une application lipschitzienne est uniformément continue.

**Démo** : Montrons que  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, x' \in E, d(x, x') < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(x')) < \varepsilon$ .

On a par hypothèse  $\forall x, x' \in E \delta(f(x), f(x')) \leq K d(x, x')$ .

Pour réaliser  $\delta(f(x), f(x')) < \varepsilon$  il suffit de réaliser  $K d(x, x') < \varepsilon$  ou  $d(x, x') < \frac{\varepsilon}{K}$ .

Soit  $\varepsilon > 0$  et choisissons  $\eta = \frac{\varepsilon}{K}$  alors on aura  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta = \frac{\varepsilon}{K}, \forall x, x' \in E, d(x, x') < \frac{\varepsilon}{K} \Rightarrow K d(x, x') < \varepsilon$

$\Rightarrow \delta(f(x), f(x')) \leq K d(x, x') < \varepsilon \Rightarrow f$  est uniformément continue sur  $E$ .

**Théorème** : Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , si  $f$  est dérivable et de dérivée bornée (c'est à dire  $\exists M > 0$  tq  $\forall x \in \mathbb{R} |f'(x)| < M$ )

alors  $f$  est lipschitzienne.

**Démo** : Le théorème des accroissements finis donne :

$\forall x, x' \in \mathbb{R} |f(x) - f(x')| \leq |x - x'| |f'(\xi)|$  avec  $\xi \in (x, x')$  : intervalle de  $x$  à  $x'$ , mais on ne sait pas qui est le plus grand donc on ne met pas les crochets.  
 $\Rightarrow \forall x, x' \in \mathbb{R} |f(x) - f(x')| \leq M |x - x'| \Rightarrow f$  est lipschitzienne.

## V. Espaces compacts

### V.1. Recouvrements

Soit  $E$  un ensemble quelconque ;  $I$  un sous ensemble de  $N$  ; Soit  $(X_i)_{i \in I}$  une famille de parties de  $E$  c'est à dire  $\forall i \in I, X_i \in \mathcal{P}(E)$ .

$(X_i)_{i \in I}$  une famille de parties de  $E$  est appelée recouvrement de  $E$  ssi  $E = \bigcup_{i \in I} X_i$ .

Si  $J \subset I$  ; si  $(X_i)_{i \in J}$  est un recouvrement de  $E$  alors  $(X_i)_{i \in J}$  est appelé recouvrement extrait.

$(X_i)_{i \in J}$  est un recouvrement fini ssi  $J$  est fini.

$E$  espace topologique.  $(X_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $E$  ssi  $\begin{cases} 1^\circ) (X_i)_{i \in I} \text{ est un recouvrement de } E \\ 2^\circ) \forall i \in I X_i \text{ est un ouvert de } E \end{cases}$ .

### V.2. Espace compact

**Def** :  $(E, \theta)$  espace topologique.

$(E, \theta)$  est compact ssi  $\begin{cases} 1^\circ) E \text{ est séparé.} \\ 2^\circ) \text{ de tout recouvrement ouvert de } E \text{ on peut extraire un recouvrement fini,} \\ \text{c'est à dire : } \forall (\theta_i)_{i \in I} ; \theta_i \text{ ouvert si } E = \bigcup_{i \in I} \theta_i ; \text{ alors } \exists J \text{ fini tq } E = \bigcup_{i \in J} \theta_i. \end{cases}$

**Exemple** :  $\mathbb{R}$  n'est pas compact car soit  $\theta_n = ]n - \frac{3}{4}, n + \frac{3}{4}[$ .

On a  $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \theta_n$ .

Si on enlève l'ouvert  $\theta_{n_0}$  alors  $\mathbb{R} \neq \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq n_0}} \theta_n \Rightarrow \mathbb{R}$  ne peut pas être recouvert pas un recouvrement fini extrait du recouvrement de « départ ».

**Def** : Soit  $E$  un espace topologique séparé ; Soit  $A \subset E$ .

$A$  est compacte ssi  $\forall (\theta_i)_{i \in I} ; \theta_i$  ouvert tq  $A \subset \bigcup_{i \in I} \theta_i$  ; alors  $\exists J$  fini  $\subset I$  tq  $A \subset \bigcup_{i \in J} \theta_i$ .

$A$  est compacte ssi  $\forall (F_i)_{i \in I} ; F_i$  fermé tq  $A \cap \left( \bigcap_{i \in I} F_i \right) = \emptyset$  ; alors  $\exists J$  fini  $\subset I$  tq  $A \cap \left( \bigcap_{i \in J} F_i \right) = \emptyset$ .

**Exemples** :

1. Soit  $E$  un espace topologique séparé ; Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suite de points de  $E$  convergeant vers  $a \in E$  alors  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\} \cup \{a\}$  est compact.

En effet : Soit  $(\theta_i)_{i \in I_0}$  une famille d'ouverts de  $E$  tq  $A \subset \bigcup_{i \in I} \theta_i$ .

Alors  $\exists i_0/a \in \theta_{i_0}$  ouvert  $\Rightarrow \theta_{i_0} \in V(a) \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \geq n_0, x_n \in \theta_{i_0}$ .

De plus  $x_1 \in \theta_1, x_2 \in \theta_2, \dots, x_{n-1} \in \theta_{n-1} \Rightarrow \bigcup_{\substack{i \in I \\ \text{(nombre fini d'ouvert)}}} \theta_i \cup \theta_{i_0} \supset A \Rightarrow A$  est compact.

2.  $[a, b]$  compact de  $\mathbb{R}$  (voir TD)