MODÉLISATION MATHÉMATIQUE

Séances 1-2

THÈME : Séries

24 janvier 2012

Table des matières

1 Introduction

Ces deux premières séances seront consacrées à l'étude de quelques applications pratiques des séries numériques et séries de fonctions. Nous en profiterons également pour introduire l'outil informatique qui va nous servir tout au long du semestre : Scilab. À l'aide de cet outil nous allons explorer de façon expérimentale les problèmes de convergence de séries et de calculs numériques qui les utilisent.

2 Séance 1

2.1 Quelques problèmes pour commencer (1h)

Problème 1. Paradoxe de Zénon

Au Vème siècle avant notre ère le philosophe grec Zénon d'Élée énonçait quelques paradoxes mettant en évidence les contradictions profondes engendrées par les conceptions de l'infini et de l'infiniment petit proposées par les écoles de pensée dominantes de son époque. L'un d'eux est le célèbre paradoxe d'Achille et de la Tortue. Voici l'histoire.

La Tortue vient voir Achille, le grand athlète, et lui propose de disputer une course de 100 mètres avec elle. Achille, sûr de sa victoire, mais beau joueur, accorde une avance de 50 mètres à la malheureuse. Une fois le départ donné, les deux se mettent en route, chacun selon ses moyens. Mais au moment où Achille atteint le milieu de la distance, où la tortue se trouvait au départ, elle a avancé et se trouve devant lui. En continuant ainsi, à chaque fois qu'Achille atteindra la position occupée par la tortue à un instant donné, cette dernière, avancera un peu et sera toujours devant lui.

Ainsi, disait Zénon, il est donc impossible à un athlète comme Achille de rattraper une pauvre bête comme la Tortue.

On vous propose de trouver la solution de ce paradoxe en utilisant ce que les mathématiciens grecs ne pouvaient pas encore concevoir, la notion d'une série convergente. Pour se fixer les idées, supposons qu'Achille court 10 fois plus vite que la Tortue. On peut symboliquement supposer que la vitesse de la Tortue est de 1m/s et que celle d'Achille est de 10m/s. On supposera que l'origine du temps est le moment de départ et que l'origine de l'espace est le point de départ d'Achille. Ainsi la Tortue part depuis le point situé à 50m de l'origine.

1. Indépendamment du raisonnement de Zénon, comment expliquez-vous qu'Achille rattrape la Tortue ?. Calculez, par exemple, le moment de temps T où Achille rejoint la Tortue.
2. Ensuite, montrez que selon le raisonnement de Zénon, le même temps T s'écrit sous forme d'une série infinie et trouvez la solution de ce "faux" paradoxe.

Problème 2. Quand on tournait autour du concept de convergence sans savoir encore l'utiliser.

En 1703, Guido Grandi (1671-1742), un mathématicien et philosophe italien, a étudié une série bien simple :

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - ... = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n$$

Il a remarqué alors que selon l'ordre de sommation on peut obtenir 0 ou 1 comme somme de cette série :

$$(1-1) + (1-1) + \cdots = 0, \quad 1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \cdots = 1$$

Et il a tout de même établi que la somme de la série doit être $\frac{1}{2}$. On pourrait retrouver ce résultat par un calcul très simple. Notons

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n$$

la somme de cette série. On peut alors remarquer très simplement que

$$s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 + \cdots = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \ldots) = 1 - s$$

On en déduit que $s = \frac{1}{2}$.

Plusieurs mathématiciens contemporains de Grandi se sont penchés sur l'étude de cette série, en apportant chacun ses arguments. En voici quelques uns.

1. **Grandi** lui même a proposé la démonstration suivante. Il était établi et admis à son époque que

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$$

En posant $x = 1$ Grandi obtient sa série et en déduit que sa somme est

$$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Euler et Fourier étaient d'accord avec son raisonnement.

2. **Leibniz** (1646-1716) trouva cela absurde ! et il a proposé une autre démonstration dont il a fait part, dans une lettre, à Jacopo Riccati (1676- 1754). Il a évoqué l'argument probabiliste suivant :
Si l'on arrête la série à un nombre fini d'éléments la somme partielle ainsi obtenue peut être égale à 1 ou à 0 avec la même probabilité. Donc, d'après Leibniz, la valeur la plus probable pour la somme totale est la moyenne entre 0 et 1 c'est-à-dire, $\frac{1}{2}$!
Lagrange et **Poisson** étaient, eux, d'accord avec l'argument de Leibniz.

Questions.

1. Que pensez-vous de cette série ?. Donnez la démonstration de votre résultat.
2. Expliquez pourquoi à votre avis les trois démonstrations proposées ci-dessus ne sont pas correctes.

3. Pour mettre en évidence les contradictions de la démonstration de Grandi, Riccati a proposé le raisonnement suivant :
   En admettant en effet que
   $$s = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}$$
   selon la procédure de Grandi, Riccati introduit la série
   $$s' = n - n + n - n + n - n + \cdots = \frac{n}{2}$$
   Trouvez la contradiction.

Problème 3. Comment calculer la somme d'une série ?
Par exemple, on voudrait savoir la valeur **numérique** de
$$S_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}, \quad S_2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$$
ou encore
$$S_3 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2k+4}{k^4+6k^2+k+3}$$
Proposez une solution.

2.2 Introduction au Scilab (1h)

Lancez Scilab. La fenêtre principale est une console d'exécution des commandes et d'affichage des résultats. La ligne de commandes est représentée par

$$\rightarrow$$

Utilisation de la console. On peut utiliser la console pour exécuter des opérations de calcul et voir les résultats.

– Tapez
```
x=2.5*(1+2.8)
```
  et appuyez sur **"Entrée"** pour exécuter la commande. Le résultat de l'instruction est affiché :
```
x=
   9.5
```
– On peut utiliser le caractère " ;" en fin d'instruction pour ne pas afficher son résultat sur console. Tapez
```
y=0.5*(8-6);
```
  et appuyez sur **"Entrée"** pour exécuter la commande. La ligne de commande est disponible mais le résultat n'est pas affiché.
– Les deux commandes que vous venez d'exécuter ont défini deux variables, "x" et "y" tout simplement en leur affectant des valeurs numériques. Vous pouvez continuer à les utiliser dans les calculs. Les opérations arithmétiques en Scilab sont "+", "-", "*", "/" . Exécutez la commande

```
z=x/y
```

– On peut faire appel aux fonctions mathématiques élémentaires dans les calculs :

```
sin()  cos()  exp() log() log10() log2() tan()
```

De nombreuses autres fonctions sont disponibles. Vous trouverez la liste complète dans l'aide de Scilab, rubrique "Fonctions élémentaires". Exécutez les commandes

```
s=sin(x)
c=cos(x)
e=exp(y)
```

Utilisation de fichiers de commandes Il est possible d'enregistrer dans un fichier une série de commandes dans l'ordre souhaité de leur exécution et les exécuter à partir de ce fichier. Pour cela on peut utiliser l'éditeur intégré de Scilab (pas uniquement !). Pour ouvrir l'Editeur de Scilab ouvrez le menu "Applications" et choisissez "Editeur". La fenêtre de l'édition s'ouvre.

– **Premier programme.** Tapez dans l'éditeur la suite d'instructions suivante

```
a=1;
b=2;
c=3;
s=a+b+c
```

Enregistrez le fichier : ouvrez le menu **"Fichier**" et choisissez **"Enregistrer"** ou bien utilisez le raccourci clavier **"CTRL+S"**. Choisissez le répertoire et le nom de votre fichier. Ensuite ouvrez le menu **"Exécuter"** et choisissez **"Charger dans Scilab"** pour exécuter les commandes. Revenez à la console pour observer le résultat.

– **Quelques éléments de programmation.** Il est possible d'écrire des programmes pour Scilab permettant d'effectuer des calculs complexes. Voici quelques éléments permettant d'organiser un programme.

Boucle "for"

```
for variable=début:pas:fin
   ...
   instructions
   ...
end
```

Par exemple, pour calculer le produit de N premiers entiers naturels on peut faire

```
N=3;
prod=1;
for n=1:1:N
   prod=prod*n;
end
```

Boucle "while"

```
while expression
       ...
       instructions
       ...
end
```

L’expression exprime la condition de continuation. On peut utiliser les opérateurs de comparaison "<", ">", "<>" (différent de) "==" (égal à, à ne pas confondre avec "=", signe d’affectation). Et les opérateurs logiques "&" (AND) et "|" (OR).

Branchement "if"

```
if (expression)   then
   instructions
elseif expression then
   instructions
else
   instructions
end
```

– **Fonctions ou sous-programmes.** Il est possible de créer des sous-programmes en scilab en utilisant la syntaxe suivante

```
function <arguments_sortie>=<nom_de_la_fonction><arguments_entrée>
    <instructions>
endfunction
```

où

nom_de_la_fonction est le nom de la fonction

arguments_entrée est la liste d’arguments d’entrée. La séquence () ou rien du tout est utilisée si la fonction n’a pas d’arguments ; S’il y plusieurs arguments, ils seront séparés par des virgules.

arguments_sortie est la liste d’arguments de sortie. S’il y a plusieurs sorties, les différents noms de variables seront séparés par des virgules, entourée de crochets, comme [y1,...,ym].

Il est possible de déclarer plusieurs fonctions dans un seul fichier et les adresser plus loin dans le même fichier.

Programme qui calcule la somme partielle d’une série.

Voici le code que vous pouvez saisir dans votre fichier d’instructions :

```
function a=elementSerie(n)
  // la fonction qui calcule le n-ème élément de la série
    a=1/(n^3); // on utilise l’opérateur ^ pour les puissances
endfunction

function s=sommePartielle(N)
  // la fonction qui calcule la somme des N premiers termes de la série
    s=0;
    for i=1:1:N
       s=s+elementSerie(i);
    end
endfunction
// programme principal = suite d’instructions d’appel
N=10;
s=sommePartielle(N)
for N=16:1:19
    s=sommePartielle(N)
end
```

Problème 4. Écrire une fonction qui calcule la somme totale (approximativement) de la série.

3 Séance 2. Comment fonctionne votre calculatrice scientifique ?

Cette deuxième séance est consacrée à un travail autonome en classe. **La présence à cette séance est obligatoire.** On vous propose de résoudre un problème énoncé ci-dessous. À la fin de la séance de travail vous devez déposer sur AREL un résumé de 1-3 pages de vos résultats. Voici quelques recommandations pour la rédaction de ce document.

- Vous devez y exposer votre analyse du problème et la solution que vous avez imaginée.
- Il est fondamental que toute affirmation de votre part soit justifiée et argumentée avec la plus grande rigueur mathématique. C'est le point essentiel qui sera jugé.
- Si des résultats numériques ont été obtenus dans votre étude , alors consacrez quelques lignes à leur analyse. Sont-ils, selon vous, conformes aux attentes ?.
- Décrivez la manière dont vous avez procédé pour trouver la solution, les sources documentaires que vous avez consultées (livres, notes de cours, web).
- Il n'est pas interdit de débattre de vos idées avec vos camarades de classe, mais votre rédaction doit rester strictement personnelle !.

Problème 5. En utilisant la théorie des séries entières et en particulier des séries de Taylor trouvez un moyen de calculer les valeurs suivantes :

$$e^{1.31}, \ \sin(0.235711), \ \ln(1.347), \ \ \sqrt[3]{1.19}, \ (1.5)^{1.6}$$

Utilisez le programme Scilab fait en séance 1 pour donner ces valeurs avec les précisions de 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001. Vous pouvez utiliser les capacités de calculatrice de Scilab pour vérifier vos résultats.