

Modélisation de séries mathématiques

Sébastien PEDREAU
Christian INGOUFF

Année 2012/2013
Semestre 3

Sommaire

1	Modélisation de séries mathématiques	2
1.1	Objectif	2
1.2	Méthodes	2
1.3	Résultats	3
1.4	Analyse	4

Chapitre 1

Modélisation de séries mathématiques

1.1 Objectif

Durant ce TP, nous avons travaillé avec les séries, en particulier avec les séries de Taylor. Notre problème était d'utiliser les fonctions usuelles afin de calculer les résultats de fonctions plus complexes telles que l'exponentielle ou le logarithme népérien.

1.2 Méthodes

Afin de calculer des valeurs difficiles à calculer avec une certaine précision, telle que $e^{1.37}$, nous allons utiliser le développement en série entière que nous avons appris en classe lors du chapitre sur les séries. Par exemple, nous savons que :

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

On peut donc ici utiliser le développement en série entière pour calculer

$$e^{1.37} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1.37^n}{n!}$$

On utilisera donc la console Scilab pour coder une fonction permettant de calculer le n^{ieme} terme d'une suite, et une fonction permettant d'additionner les n premiers termes d'une série.

La précision permettra de déterminer à quel moment le n^{ieme} terme de la suite peut être considéré comme négligeable (c'est-à-dire le moment où le n^{ieme} terme est plus faible que la précision).

Pour utiliser notre code, il suffit d'exécuter le fichier "TP1.sce" dans la console Scilab avec la commande 'exec'. Ensuite, entrez la commande "calculX(précision)", X étant le numéro du calcul à faire, et précision que vous souhaitez (Les calculs ont été faits avec une précision variant entre 0,1 et 0,0001).

Liste des calculs :
> Calcul1 : $exp^{1,37}$
> Calcul2 : $\sin(0,21466)$
> Calcul3 : $\ln(1,338)$
> Calcul4 : $\sqrt[3]{1,34}$
> Calcul5 : $1,2^{1,3}$

1.3 Résultats

Voici les résultats trouvés à la suite des calculs opérés sur Scilab :

Calcul1 : $exp^{1,37}$
précision 0.1 => $exp^{1,37} = 3.8837902$
précision 0.01 => $exp^{1,37} = 3.9240083$
précision 0.001 => $exp^{1,37} = 3.9349887$
précision 0.0001 => $exp^{1,37} = 3.9353965$
Résultat avec une calculatrice : $exp^{1,37} = 3.9353507$

Calcul2 : $\sin(0,21466)$
précision 0.1 => $\sin(0,21466) = 0.21466$
précision 0.01 => $\sin(0,21466) = 0.21466$
précision 0.001 => $\sin(0,21466) = 0.2130114$
précision 0.0001 => $\sin(0,21466) = 0.2130114$
Résultat avec une calculatrice : $\sin(0,21466) = 0.213015244$

Calcul3 : $\ln(1,338)$
précision 0.1 => $\ln(1,338) = 0.338$
précision 0.01 => $\ln(1,338) = 0.2937495$
précision 0.001 => $\ln(1,338) = 0.2904866$
précision 0.0001 => $\ln(1,338) = 0.2911203$
Résultat avec une calculatrice : $\ln(1,338) = 0.291175962$

Calcul4 : $\sqrt[3]{1,34}$

précision 0.1 => $\sqrt[3]{1,34} = 1.1133333$

précision 0.01 => $\sqrt[3]{1,34} = 1.1004889$

précision 0.001 => $\sqrt[3]{1,34} = 1.1029151$

précision 0.0001 => $\sqrt[3]{1,34} = 1.1025022$

Résultat avec une calculatrice : $\sqrt[3]{1,34} = 1.10247377$

Calcul5 : $1,2^{1,3}$

précision 0.1 => $1,2^{1,3} = 1.26$

précision 0.01 => $1,2^{1,3} = 1.26$

précision 0.001 => $1,2^{1,3} = 1.2678$

précision 0.0001 => $1,2^{1,3} = 1.267436$

Résultat avec une calculatrice : $1,2^{1,3} = 1.26746396$

1.4 Analyse

On notera la remarquable précision de la méthode utilisée qui nous donne une valeur se rapprochant dans tout les cas au millième, voire au dix-millième près de la valeur donnée par une calculatrice. En utilisant uniquement des fonctions usuelles faciles à calculer, on peut donc déterminer le résultat de valeurs beaucoup plus complexes.

Cependant, cette méthode a aussi ses limites. On remarque qu'il est quasiment impossible d'obtenir la valeur exacte recherchée : la valeur que nous trouvons sera soit plus légèrement inférieure ($e^{1.37} = 3.9353507 > 3.9353965$ (précision 0,0001)), soit légèrement supérieure ($\sqrt[3]{1,34} = 1.10247377 < 1.1025022$ (précision 0,0001)) ce qui pourrait poser des problèmes si nous utilisions nos résultats pour des calculs scientifiques nécessitant des données exactes (et non approchées).

Néanmoins, dans l'usage d'une calculatrice scientifique, dont la précision est limitée par la taille de son interface, la méthode du développement en séries de Taylor, à laquelle on appliquerait la précision maximale de la calculatrice, permet de programmer de façon très simple la machine.