MODÉLISATION MATHÉMATIQUE

Séances 3-4

THÈME : Séries de Fourier

7 février 2013

Table des matières

1 Introduction

Ces deux séances seront consacrées à l'étude des applications pratiques des séries de Fourier. On y apprendra également à utiliser Scilab pour tracer les graphiques de fonctions d'une variable.

2 Séance 3

2.1 Un peu de Scilab

2.1.1 Les tableaux avec Scilab

L'utilisation de matrices et vecteurs est généralisée en Scilab. Beaucoup de fonctions sont définies avec des arguments sous forme de vecteurs ou de matrices. Une matrice est un tableau de n lignes et m colonnes. On peut définir une matrice explicitement :

```
A=[1,2,3;4,5,6]
```

A remarquer : on sépare les éléments d'une même ligne par des virgules (ou des espaces) et les lignes entre elles par des " ;".

Voici quelques commandes qui créent des matrices simples :

```
I=eye(n);      // crée une matrice identité de taille n
Z=zeros(n,m); // crée une matrice de taille n x m remplie de 0
U=ones(n,m);  // crée une matrice de taille n x m remplie de 1
```

Les opérations algébriques sur les matrices sont simples, à condition de respecter les dimensions

```
A=[1,2,3;4,5,6];
B=ones(2,3);
C=A';       // transposée de A
D=A+0.5*B; // somme et multiplication par une constante
E=C*D;      // multiplication de matrices
```

Les vecteurs sont des cas particuliers de matrices : soit des matrices lignes, soit des matrices colonnes.

```
x=[1,2,3];    // vecteur ligne
y=ones(3,1); // vecteur colonne
z=A*y;        // multiplication de matrice et de vecteur colonne
```

Pour accéder aux éléments d'une matrice, on utilise la syntaxe suivante :

```
a=A(1,3); // coefficient de la 1ère ligne, 3ème colonne
b=x(2);   // dans le cas d'un vecteur ligne ou colonne, il suffit d'indiquer
// la position de la coordonnée du vecteur
```

Pour créer une subdivision d'un intervalle avec un pas donné :

```
dt=0.1;
t=t0:dt:t1;
```

Cette syntaxe crée un vecteur ligne t dont les éléments sont définis par $t_i = t_0 + i \times dt$. Il est ainsi possible de l'utiliser comme un vecteur.

Enfin, de nombreuses fonctions élémentaires acceptent des arguments matriciels. Par exemple

```
dt=0.1;
t=t0:dt:t1;
s=sin(t);
```

La dernière commande est équivalent au calcul d'un tableau de valeurs de la fonction $\sin$ dans tous les points du tableau t :

```
dt=0.1;
t=t0:dt:t1;
for i=1:length(t) // ici length(t) renvoie le nombre d'éléments de t
   s(i)=sin(t(i));
end
```

2.1.2 Les graphiques avec Scilab

Fonction d'une variable
Pour une fonction $f : x$ à une seule variable, le graphique est défini par la donnée de deux tableaux :
- x les points d'abscisses
- y les points $y(i) = f(x(i))$

La commande `plot2d(x,y)` crée une fenêtre graphique et y affiche les points.

Fonction de deux variables
Pour une fonction f à deux variables, le graphique est défini par la donnée de trois tableaux :
- x les points d'abscisses, y les points d'ordonnées.
- z la matrice dont le nombre de lignes est la taille de x et le nombre de colonnes est la taille de y et telle que
$$z(i, j) = f(x(i), y(j))$$

La commande `plot3d(x,y,z)` crée une fenêtre graphique et y affiche les points.

Problème 1. 1. Créer une foncton de deux arguments : $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ qui renvoie
$$\sin(n\pi x)$$

2. Tracer le graphe de cette fonction pour différents choix de n sur l'intervalle $[-1, 1]$.
3. Définir une fonction de deux arguments x et t qui renvoie
$$e^{-t} \sin(2\pi x)$$
Tracer son graphe sur le rectangle $[-1, 1] \times [0, 1]$.

2.2 Une fonction et sa série de Fourier

Problème 2. Convergence d'une série de Fourier. Phénomène de Gibbs

Nous allons considérer ici une fonction périodique de période 2π.

1. Quelles sont les fonctions auxquelles on peut associer une série de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

avec

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx,\, b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

Est-ce que les mêmes fonctions peuvent toujours être décomposées en série de Taylor ?.

2. Soient les fonctions

$$f(x) = x^2 - \pi^2, \quad g(x) = \frac{x - \pi}{2}$$

   (a) Est-ce que ces fonctions peuvent être décomposées en série de Fourier ?.
   (b) Si oui, calculer alors leurs coefficients de Fourier.
   (c) Tracer les graphes de ces fonctions avec Scilab.
   (d) Calculer les sommes partielles (pour $n = 1, 2, 5, 10, 40$) des séries de Fourier des deux fonctons et les tracer. Qu'observez-vous ?. Pouvez-vous expliquer vos observations ?.

2.3 Application des séries de Fourier à la résolution des problèmes aux limites pour les équations différentielles

On considère une barre homogène de longueur l. Supposons que la barre est suffisamment fine pour que la température de tous les points d'une section transversale soit identique.

Ainsi le processus de la propagation de la chaleur peut être décrit à l'aide d'une fonction $u(x,t)$ qui définit la température pour chaque point $x \in [0,l]$ de la barre et à chaque moment de temps t.

Supposons que la barre est isolée. Si les deux extrémités sont maintenues aux températures constantes u_1 et u_2, il est bien connu qu'au bout d'un certain temps une distribution linéaire de température s'établit :

$$u(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l} x \tag{2.1}$$

Nous nous intéressons au processus qui mène à ce résultat. Pour obtenir l'équation qui vérifie $u(x,t)$ nous allons utiliser les lois physiques suivantes :

– **Loi de Fourier.** Elle stipule : La différence de températures entre deux points d'un corps provoque un flux de chaleur. La quantité de chaleur qui transite par u au point x donné par unité de temps est égale à

$$q(x) = -k \frac{\partial u}{\partial x}$$

où k est le coefficient de conductivité thermique. Nous supposons ici que ce coefficient est constant.

– La circulation d'un flux thermique dans un intervalle $[x, x+dx]$ de la barre de section transversale S provoque un gain d'énergie par unité de temps égal à

$$Q = Sq(x) - Sq(x+dx) \sim -S \frac{\partial q}{\partial x} dx$$

– L'absorption de cette quantité d'énergie par l'intervalle $[x, x+dx]$ de la barre provoque un changement de température de ce dernier. Etant donné que le volume de l'intervalle est égale à Sdx, on a la relation :

$$Q = c\rho S dx \frac{\partial u}{\partial t}$$

où c est la chaleur spécifique de la matière considérée et ρ est la densité de la barre.

On en déduit que

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}$$

Alors

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.2}$$

Nous venons donc d'obtenir la forme la plus simple de l'équation de la propagation de chaleur.

Le flux thermique que nous étudions ici doit donc vérifier cette équation. Il doit également satisfaire un certain nombre de conditions supplémentaires : une condition initiale ; distribution initiale des températures :

$$u(x, 0) = \varphi(x)$$

et une condition aux bords (températures des extrémités) :

$$u(0, t) = g_1(t), \quad u(l, t) = g_2(t)$$

Ainsi le problème complet qui décrit un processus de propagation de chaleur dans une barre de longueur l est posé en termes suivants :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in]0, l[\,, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) & x \in]0, l[\\ u(0, t) = g_1(t) & \\ u(l, t) = g_2(t) & \end{cases}$$

Problème 3. Soit l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

On cherche une fonction $u(x, t)$, définie sur l'ensemble $[0, 1] \times \mathbb{R}_+$, deux fois continûment dérivable selon x et une fois continûment dérivable selon t qui vérifie cette équation et les conditions aux limites

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

et initiale

$$u(x, 0) = g(x)$$

où $g \in C^2[0, 1]$, $g(0) = g(1) = 0$.

1. Montrez que pour tout $\forall n \in \mathbb{N}^*$ les fonctions

$$u_n(x, t) = e^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x)$$

vérifient l'équation ci-dessous et les conditions aux limites : $u_n(0, t) = u_n(1, t) = 0, \ \forall t \in \mathbb{R}_+$.

2. Montrer que toute combinaison linéaire des fonctions $u_n(x,t)$ de type

$$s_N(x,t) := \sum_{n=1}^{N} \alpha_n u_n(x,t)$$

vérifie la même équation et les mêmes conditions aux limites.

3. Supposons que

$$g(x) = \sin(\pi x).$$

Est-il possible de trouver un $N \in \mathbb{N}$ et des coefficients $(\alpha_n)_{n \in [\![1,N]\!]}$ pour que la condition initiale soit également satisfaite : $s_N(x,0) = g(x)$?. Si oui, donner la solution du problème, $u(x,t)$.

4. Supposons que

$$g(x) = x(x-1).$$

Est-il possible de trouver un $N \in \mathbb{N}$ et des coefficients α_n pour que la condition initiale soit également satisfaite : $s_N(x,0) = g(x)$?. Si oui, donner la solution du problème, $u(x,t)$. Si non, sous quelle condition l'égalité $s_N(x,0) = g(x)$ serait-elle possible ?.

5. Pour une fonction $g(x)$ quelconque, est-il possible de trouver la solution de l'équation qui vérifie les conditions aux limites et initiale sous forme d'une série ?. Si oui, comment déterminer les coefficients les α_n ?.

3 Séance 4. Equation de propagation de la chaleur. Etude pratique

Cette séance est consacrée à un travail autonome en classe. **La présence à cette séance est obligatoire ! !**. On vous propose de résoudre un problème énoncé ci-dessous. A la fin de la séance de travail, vous devez déposer sur AREL un résumé de 1-3 pages de vos résultats. Voici quelques recommandations pour la rédaction de ce document.

- Vous devez y exposer votre analyse du problème et la solution que vous avez imaginée.
- Il est fondamental que toute affirmation de votre part soit justifiée et argumentée avec la plus grande rigueur mathématique. C'est le points essentiel qui sera jugé.
- Si des résultats numériques ont été obtenus dans votre étude consacrez quelques lignes à leur analyse. Sont-ils, selon vous, conformes aux attentes ?.
- Décrivez la manière dont vous avez procédé pour trouver la solution, les sources documentaires que vous avez consultées (livres, notes de cours, web).
- Il n'est pas interdit de débattre de vos idées avec vos camarades de classe, mais votre rédaction doit rester strictement personnelle !.

Problème 4. On considère une barre de métal de longueur 1, isolée. La propagation de la chaleur dans cette barre est décrite par l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

On suppose que la répartition initiale de la température dans la barre est décrite par la fonction :

$$u(x,0) = g(x) := x(x-1)$$

et que les extrémités sont maintenant à température constante nulle :

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

On cherche une fonction $u(x,t)$, définie sur l'ensemble $[0,1] \times \mathbb{R}_+$, deux fois continûment dérivable selon x et une fois continûment dérivable selon t, qui vérifie cette équation et les conditions aux limites.

1. Ecrire la solution $u(x,t)$ sous forme d'une série.
2. Trouver les coefficients de cette série.
3. Ecrire sous Scilab une fonction qui permet de calculer une approximation de cette solution par des sommes partielles de la série.
4. Afficher le graphe de la solution (en 3D) sur le carré $[0,1] \times [0,1]$.

Problème 5. On change un peu les conditions du problème. On suppose maintenant que la répartition initiale est

$$g_1(x) = x^2 + 1$$

et que les extrémités sont maintenues à températures constantes, non nulles :

$$u(0,t) = 1; \quad u(1,t) = 2$$

On cherche donc maintenant la solution du problème

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in \left]0, l\right[, t > 0 \\ u(x,0) = g_1(x) & x \in \left]0, l\right[\\ u(0,t) = 1 \\ u(l,t) = 2 \end{cases} \tag{3.1}$$

1. On va d'abord effectuer un changement d'inconnue. Soit la fonction

   $$w(x,t) = 1 + x$$

   Vérifier que cette fonction vérifie les conditions aux limites :

   $$w(0,t) = 1, \quad w(l,t) = 2$$

2. On pose

   $$v(x,t) = u(x,t) - w(x,t)$$

   Montrer que si u est solution du problème 3.1 alors v vérifie

   $$\begin{cases} v_t = v_{xx} & x \in \left]0, l\right[, t > 0 \\ v(x,0) = x(x-1) & x \in \left]0, l\right[\\ v(0,t) = 0 \\ v(l,t) = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

3. Trouver $v(x,t)$ et en déduire $u(x,t)$.
4. Afficher le graphe de la solution $u(x,t)$ (en 3D) sur le carré $[0,1] \times [0,1]$.