Equation de propagation de la chaleur

Sébastien Pedreau
Christian Ingouff

Année 2012/2013
Semestre 3

Sommaire

Chapitre 1

Propagation de la chaleur

1.1 Objectif

Le but de cet exercice était de travailler sur des équations différentielles permettant de modéliser la propagation de la chaleur dans une barre de métal. Durant ce tp, nous avons donc dû utiliser les développements en série de Fourier ainsi que l'outil de calcul Scilab afin de résoudre ces équations et déterminer la fonction représentant la propagation de la chaleur

1.2 Méthodes

1.2.1 Sujet

Nous allons donc considérer une barre de métal de longueur 1. Nous posons l'équation (1) suivante, qui modélise sous la forme d'une équation différentielle la propagation de la chaleur dans la barre considérée :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Cette équation respecte les conditions initiales suivantes :

$$u(x;0) = g(x) := x(x-1)$$

$$u(0;t) = u(1;t) = 0$$

1.2.2 Solution sous la forme d'une série de Fourier

Posons $u_n = exp(-n^2\pi^2 t)sin(n\pi x)$, et montrons que cette solution vérifie bien les conditions de (1) :

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = (-n^2\pi^2 t)exp(-n^2\pi^2 t)sin(n\pi x)$$

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = \frac{\partial(n\pi exp(-n^2\pi^2 t)cos(n\pi x))}{\partial t}$$

$$=> \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = (-n^2\pi^2 t)exp(-n^2\pi^2 t)sin(n\pi x)$$

On retrouve donc bien l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

De plus,

$$u_n(0;t) = exp(0)sin(0) = 0$$

$$u_n(1;t) = exp(-n^2\pi^2)sin(n\pi) = 0$$

Donc u_n vérifie bien les conditions initiales. On en déduit que u_n est bien solution de (1).

Posons à présent S_N une combinaison linéaire des fonctions u_n trouvées précedemment.

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n u_n(x;t)$$

Montrons que S_N est solution de l'équation (1) :

$$\frac{\partial S_N}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n u_n(x;t))$$

$$=> \frac{\partial S_N}{\partial t} = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \frac{\partial u_n}{\partial t}$$

$$=> \frac{\partial S_N}{\partial t} = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n((-n^2\pi^2 t)exp(-n^2\pi^2 t)sin(n\pi x))$$

De la même manière :

$$\frac{\partial^2 S_N}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}$$

$$=> \frac{\partial^2 S_N}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n((-n^2\pi^2 t)exp(-n^2\pi^2 t)sin(n\pi x))$$

On retrouve donc bien l'équation $\frac{\partial S_N}{\partial t} = \frac{\partial^2 S_N}{\partial t^2}$

De plus,

$$S_N(0;t) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n u_n(0;t) = 0 \, (car \, u_n(0;t) = 0)$$

$$S_N(1;t) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n u_n(1;t) = 0 \, (car \, u_n(1;t) = 0)$$

Donc S_N vérifie bien les conditions initiales. On en déduit que S_N est bien solution de (1).

On cherche à exprimer S_N telle que la condition initiale $S_N(x;0) = g(x)$ soit respectée :

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n sin(n\pi x) = x(x-1)$$

Afin de pouvoir calculer cette égalité, nous allons poser g(x) sous la forme d'une série de Fourier, c'est-à-dire :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{1} a_n cos(n\omega t) + b_n sin(n\omega t)$$

1.2.3 Coefficient de la série de Fourier

Nous avons donc g(x) sous la forme :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{1} a_n cos(n\omega t) + b_n sin(n\omega t)$$

Calcul de a_n

On cherche à résoudre le calcul $S_N(x;0) = g(x)$, c'est-à-dire :

$$\sum_{n=0}^{1} a_n cos(n\omega t) + b_n sin(n\omega t) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n sin(n\pi x)$$

On trouve donc que $a_n = 0$, car il n'y a aucune composante dépendant de $cos(n\pi x)$ dans S_N.

Comme $a_n = 0$, on en déduit que g(x) est une fonction impaire. Comme g(x) est définie sur [0, 1], alors g(x) est une fonction impaire sur [-1, 1].

Calcul de b_n

D'après les cours sur la série de Fourier, on peut écrire b_n sous la forme :

$$b_n = \frac{2}{periode} \int_{-1}^{1} g(x) sin(n\pi x) \,\mathrm{d}x$$

Comme g(x) est une fonction impaire sur [-1, 1] et que la période est égale à 2, alors :

$$b_n = 2 \int_{0}^{1} g(x) sin(n\pi x) \,\mathrm{d}x$$

$$b_n = 2 \,(\int_{0}^{1} x^2 sin(n\pi x) \,\mathrm{d}x - \int_{0}^{1} x sin(n\pi x) \,\mathrm{d}x)$$

En utilisant une double intégration par partie pour chaque terme, on trouve :

$$b_n = 2 \left(\left[\frac{-x^2 cos(n\pi x)}{n\pi} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2x cos(n\pi x)}{n\pi} \,\mathrm{d}x - \left[\frac{-x cos(n\pi x)}{n\pi} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{cos(n\pi x)}{n\pi} \,\mathrm{d}x \right)$$

$$b_n = 2 \left(\frac{2}{n\pi} \left[\frac{cos(n\pi x)}{n^2\pi^2} \right]_0^1 \right)$$

$$b_n = \frac{4}{n^3\pi^3} \left((-1)^n - 1 \right)$$

Donc on peut écrire S_N sous la forme :

$$g(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{4}{n^3\pi^3} \left((-1)^n - 1 \right) sin(n\omega t)$$

Donc comme $g(x) = u_n(x;0)$, que $u_n(x;t) = exp(-n^2\pi^2 t) sin(n\pi x)$ et $S_N = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n u_n(x;t)$ on en déduit que :

$$S_N(x;t) = \sum_{n=1}^{N} \frac{4}{n^3\pi^3} \left((-1)^n - 1 \right) exp(-n^2\pi^2 t) sin(n\omega t)$$

Donc comme S_N est solution de l'équation (1), on en déduit que :

$$u_n(x;t) = \sum_{n=1}^{N} \frac{4}{n^3\pi^3} \left((-1)^n - 1 \right) exp(-n^2\pi^2 t) sin(n\omega t)$$

1.2.4 Modifions un peu nos données

Nous reprennons l'équation (1), mais nous changeons les données initiales du problème telles que :

$$g_1(x) = x^2 + 1$$

$$u_n(0;t) = 1$$

$$u_n(1;t) = 2$$

On pose la fonction $w_n(x;t) = 1 +$ x. Vérifions que cette équation satisfait aux équations initiales :

$$w_n(0;t) = 1 + 0 = 1$$

$$w_n(l;t) = 1 + l = 2\,(car\,la\,barre\,est\,de\,longueur\,1)$$

Donc w_n vérifie les conditions initiales proposées.

On pose la fonction v(x,t) telle qu'elle est définie dans le problème 4 (en tant que u(x,t)) :

On a d'ores et déjà démontré que v(x,t) vérifiait l'ensemble des conditions :

$$u_t = u_x x; x \in]0,1[$$

$$u(x,0) = x(x-1); x \in]0,1[$$

$$u(0,t) = 0$$

$$u(1,t) = 0$$

On a v_n qui vérifie les conditions initiales avant que l'on ne les change, donc v_n peut s'écrire :

$$v_n(x;t) = \sum_{n=1}^{N} \frac{4}{n^3\pi^3}\left((-1)^n - 1\right) exp(-n^2\pi^2 t) sin(n\omega t)$$

Et on peut écrire w(x ; t) telle que :

$$w_n(x;t) = 1 + x$$

Donc comme $u_n = v_n + w_n$ alors :

$$u_n(x;t) = v_n(x;t) + w_n(x;t)$$

$$u_n(x;t) = 1 + x + \sum_{n=1}^{N} \frac{4}{n^3\pi^3}\left((-1)^n - 1\right) exp(-n^2\pi^2 t) sin(n\omega t)$$

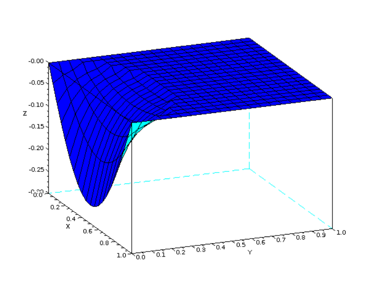

FIGURE 1.1 – Aperçu du problème 4 (fonction graphPb4())

1.3 Analyse des résultats

Les problèmes présentés décrivent la répartition de la chaleur le long d'une barre de métal en fixant les températures aux extrémités. Voici deux configurations différentes :
u(0,t) = 0 ; u(1,t) = 0 (problème 4) et u(0,t) = 1 ; u(1,t) = 2 (problème 5)

A t = 0, on constate que la température est d'abord moins élevée au milieu de la barre, mais la répartition de la température devient uniforme et égale à 0 (la température des extrémités) pour t > 0.35.

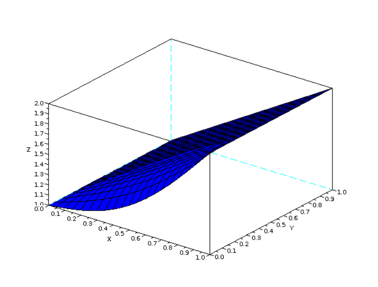

FIGURE 1.2 – Aperçu du problème 5 (fonction graphPb5())

Ici, de manière similaire au problème 4 à t = 0, la répartition de la température est d'abord irrégulière pour ensuite se stabiliser de manière affine à partir de t = 0.35.

On en conclut physiquement que dans une barre de métal, la température aura tendance à se répartir régulièrement le long de celle-ci selon la température de ses extrémités.