Système dynamique discret

Sébastien Pedreau
Christian Ingouff

Année 2012/2013
Semestre 4

Sommaire

Chapitre 1

Système dynamique discret

1.1 Introduction

Le but de ce travail est d'étudier différents systèmes dynamiques discrets. A partir de systèmes dynamiques, nous allons faire des études de convergence, de points fixes ainsi que de périodicité. L'étude des systèmes dynamiques est notamment utile dans les recherches sur la théorie du chaos.

1.2 Méthodes

Nous allons à présent étudier un système dynamique discret. On pose A une matrice réelle 2x2 quelconque, et notre système dynamique sera défini par la relation $x_{n+1} = Ax_n$, avec x_n un doublet de réels.

1.2.1 Orbite du système

On cherche à définir l'orbite du système dynamique, nous devons donc trouver l'expression de x_n en fonction de sa condition initiale x_0. Démontrons par récurrence que $x_n = A^n x_0$:

- Pour n=0 ; $x_n = A^0 x_0 = x_0$
- Supposons qu'à un certain rang n, $x_n = A^n x_0$.

$$x_{n+1} = Ax_n = AA^n x_0$$
$$x_{n+1} = A^{n+1} x_0$$

- D'après l'axiome de réccurence, on en déduit que quelque soit n un réel, alors $x_n = A^n x_0$.

On en déduit l'orbite du système :

$$O(x_0) = \{x(0) = x_0, ..., x(n) = A^n x_0, ...\}$$

1.2.2 Points fixes

On cherche à présent les points fixes du systèmes, c'est-à-dire les points qui respectent l'équation $x_{n+1} = x_n$

$$x_{n+1} = x_n$$
$$=> \forall A \in M_2; Ax_n = x_n$$
$$=> x_n = 0$$

On en déduit que le doublet $x_0 = (0, 0)$ est toujours un des points fixes d'un système linéaire.

On sait que les points fixes du système vérifient l'équation $Ax_n = x_n$. On pose λ vecteur propre de la matrice A. On sait donc que :

$$x_n = Ax_n = \lambda x_n$$

On en déduit donc que les points fixes du systèmes sont liés au vecteur propre de A.

1.2.3 Périodicité

On cherche a déterminer si le système dynamique est périodique, et si oui, trouver sa période. On sait que le système est périodique de période p s'il existe un p tel que $x_n = x_{n+p}$.

$$x_n = x_{n+p}$$
$$=> A^n x_0 = A^{n+p} x_0$$
$$=> A^n = A^{n+p}$$
$$=> A^p = id_E$$

On en déduit que le système est périodique de période p s'il existe p un entier tel que $A^p = id_E$

1.2.4 Convergence

Soit $x_n \in \mathbb{R}^2$. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si :

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \lim_{n\to\infty} x_n = (a, b)$$

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On définit x_n par la récurrence :

$$x_{n+1} = Ax_n$$

Nous avons démontré que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = A^n x_0$ par récurrence. Ainsi, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ses points fixes.

Soient $\lambda_1 \in Sp(A)$ et $\lambda_2 \in Sp(A)$ tels que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, et $\{v_1, v_2\}$ la base de vecteurs propres associés.

Alors $Av_1 = \lambda_1 v_1, Av_2 = \lambda_2 v_2$, et $\{v_1, v_2\}$ étant une base de $\mathbb{R}^2$,

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, x = av_1 + bv_2$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} x_n &= A^n x_0 \\ \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, x_n &= A^n(av_1 + bv_2) \\ \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, x_n &= aA^n v_1 + bA^n v_2 \\ \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, x_n &= a\lambda_1^n v_1 + b\lambda_2^n v_2 \end{aligned}$$

Nous étudierons la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selon les valeurs de λ_1 et λ_2

- Si $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| < 1$, $(\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\lambda_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers (0,0).
- Si $|\lambda_1| > 1$ et $|\lambda_2| > 1$, $(\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\lambda_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
- Si $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| > 1$, $(\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et $(\lambda_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
- Si $|\lambda_1| = 1$ et $|\lambda_2| < 1$, $(\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 et $(\lambda_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers av_1.
- Si $|\lambda_1| = 1$ et $|\lambda_2| > 1$, $(\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et $(\lambda_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

1.3 Résultats

D'après les méthodes énoncées précédemment, nous allons tenter de trouver les points fixes et la périodicité de certaines matrices.

A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Polynôme caractéristique $\chi_A = \lambda^2 - 2\lambda + 2 > 0$

Donc il n'y a pas de valeurs propres réelles. D'après la méthode vue précedemment, on en déduit que le seul point fixe du système est le point aux coordonnées (0, 0).

Il n'existe pas de p entier tel que $A^p = I_2$, on en déduit donc qu'il n'y a ici pas de périodicité.

B = $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Polynôme caractéristique $\chi_B = \lambda^2 + 1 > 0$

Il n'y a donc pas de valeurs propres réelles. On en déduit que le seul point fixe du système est le point aux coordonnées (0, 0).

On cherche à présent un entier p tel que $B^p = I_2$

$$B^p = I_2$$
$$\Leftrightarrow (X^p - id_E)(B) = 0$$

On en déduit donc que $X^p - id_E$ est un multiple de $\chi_B = \lambda^2 + 1 > 0$, ils partagent donc les mêmes racines. Or, $x^2 + 1 = 0 => x = i$ ou $x = -i$. Donc i et -i sont les racines de $X^p - I$, ce qui nous donne le système suivant :

$$\begin{cases} i^p - 1 = 0 \\ (-i)^p - 1 = 0 \end{cases}$$

$$=> \begin{cases} i^p = 1 \\ (-i)^p = 1 \end{cases}$$

$$=> p = 4$$

Donc ce système dynamique discret a une périodique de période 4.
C = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0.5 \end{pmatrix}$

Polynôme caractéristique $\chi_C = \lambda^2 - 1,5\lambda + 0,5 = (1 - \lambda)(0,5 - \lambda)$

On en déduit que les points fixes sont les points respectant une des deux équations suivantes :

$$x_n = 1.x_n$$

ou

$$x_n = \frac{x_n}{2}$$

Comme $Sp(C) = \{\frac{1}{2}, 1\}$, le système converge.

Il n'existe pas de p entier tel que $C^p = id_E$, on en déduit donc qu'il n'y a ici pas de périodicité.

D = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Polynôme caractéristique $\chi_D = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (2-\lambda)(4-\lambda)$

On en déduit que les points fixes sont les points respectant une des deux équations suivantes :

$$x_n = 4x_n$$

ou

$$x_n = 2x_n$$

Finalement, on peut donc dire que le seul point fixe du système est le point (0, 0).
Comme $Sp(D) = \{2, 4\}$, le système diverge.
Il n'existe pas de p entier tel que $D^p = id_E$, on en déduit donc qu'il n'y a ici pas de périodicité.

E = $\begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 1 & 0,5 \end{pmatrix}$

Polynôme caractéristique $\chi_E = (0,5-\lambda)^2$

On en déduit que les points fixes sont les points respectant une des deux équations suivantes :

$$x_n = \frac{x_n}{2}$$

Finalement, on peut donc dire que le seul point fixe du système est le point (0, 0).
Comme $Sp(E) = \{\frac{1}{2}\}$, le système converge.
Il n'existe pas de p entier tel que $E^p = id_E$, on en déduit donc qu'il n'y a ici pas de périodicité.

F = $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0,5 \end{pmatrix}$

Polynôme caractéristique $\chi_F = (0,5-\lambda)(2-\lambda)$

On en déduit que les points fixes sont les points respectant une des deux équations suivantes :

$$x_n = \frac{x_n}{2}$$

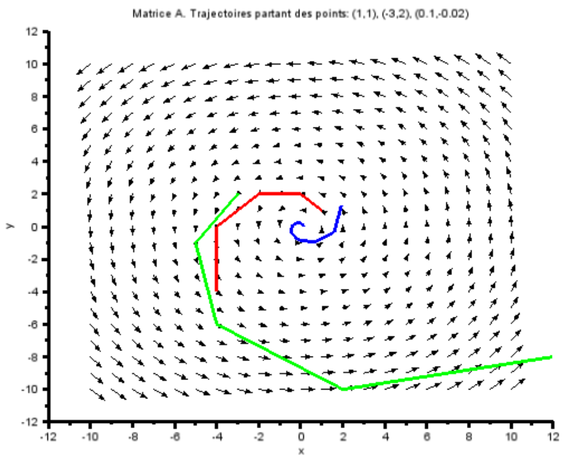
ou

$$x_n = 2x_n$$

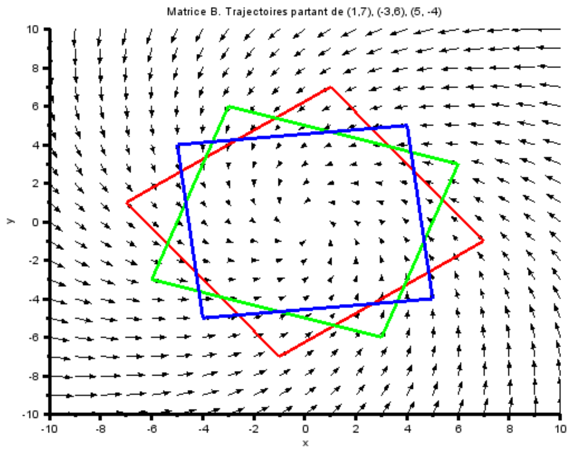
Finalement, on peut donc dire que le seul point fixe du système est le point $(0, 0)$.
Comme $Sp(F) = \{\frac{1}{2}, 2\}$, le système diverge.
Il n'existe pas de p entier tel que $F^p = id_E$, on en déduit donc qu'il n'y a ici pas de périodicité.

1.4 Analyse

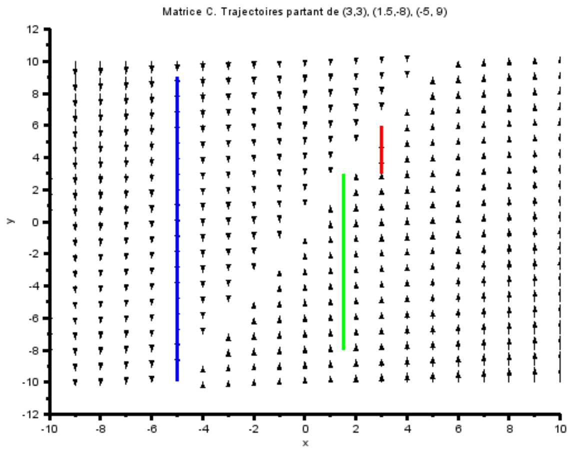
Nous analyserons ici les portraits de phase obtenus grâce à Scilab afin de confirmer nos résultats.



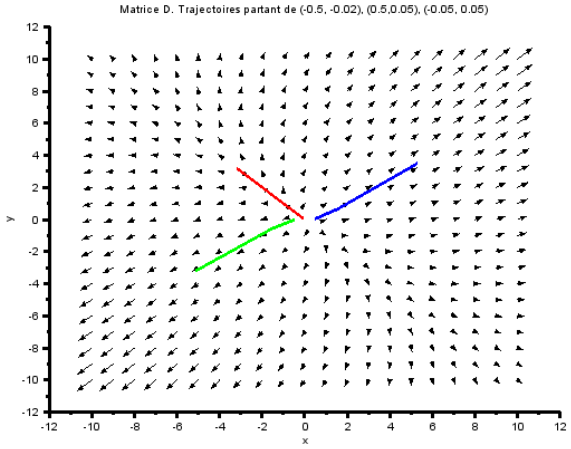
On constate, en utilisant la matrice A, que les trajectoires décrites sont en spirale, se dirigeant vers l'extérieur, avec pour seul point fixe (0,0) : elles caractérisent ainsi un système divergeant et non périodique.



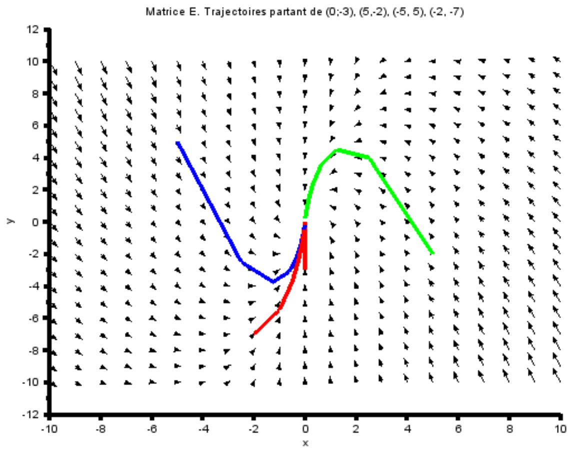
Les orbites décrivent avec la matrice B des parallélogrammes avec (0,0) le seul point fixe : on observe ainsi un système périodique divergeant de période 4.



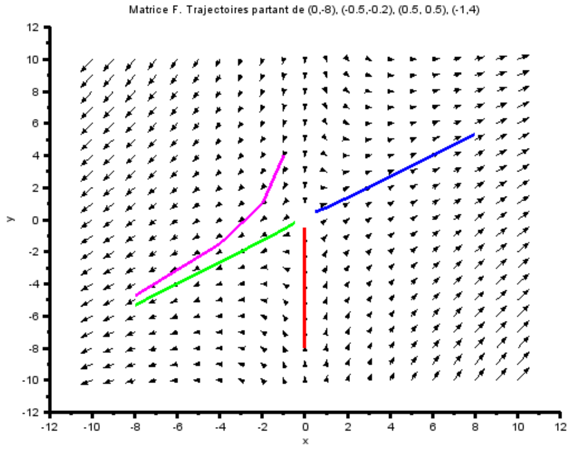
Les trajectoires sont dans le cas de la matrice C rectilignes et semblent s'arrêter sur la droite $y = 2x$, qui regroupe les points fixes du système. Ceci signifierait que le système est convergeant non périodique vers cette droite.



Les orbites sont pour la matrice D également rectilignes mais se dirigent vers l'extérieur : le système est donc divergeant non périodique. Le seul point fixe du système est (0,0).



Les trajectoires se concentrent avec la matrice E sur le point (0,0), seul point fixe du système : le système est alors convergeant non périodique vers (0,0).



Pour la matrice F, les trajectoires fuient vers l'extérieur, avec (0,0) seul point fixe du système : le système est donc divergeant non périodique.

Nous relèverons dans l'ensemble que les systèmes auront davantage tendance à être divergeants et non périodiques.

1.5 Méthode d'Euler

On pose le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

où $X(t) = (x_1(t), x_2(t))^T \in \mathbb{R}^2, A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On souhaite l'étudier sur un intervalle de temps $t \in [0, T]$, que l'on subdivise en n sous-intervalles de longueur Δt.
Soient $\lambda_1 \in Sp(A)$ et $\lambda_2 \in Sp(A)$.

On note $B = I + \Delta t A$ la matrice de la méthode d'Euler.

$$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \det(\Delta t A + (1 - \lambda)I) = \Delta t \det(A - \frac{\lambda - 1}{\Delta t} I)$$

On a alors $Sp(B) = \{\frac{\lambda_1 - 1}{\Delta t}, \frac{\lambda_2 - 1}{\Delta t}\}$.