MODÉLISATION MATHÉMATIQUE

Séances 5-6

THÈME : Systèmes dynamiques discrets dans $\mathbb{R}^2$

21 mars 2013

Table des matières

1 Introduction

Cette séance sera consacrée à l'étude de systèmes dynamiques discrets dans le plan.

2 Séance 9

Définition 2.1. Soit $D \in \mathbb{R}^m$ un ensemble et $f : D \to D$ une fonction continue et dérivable. On appelle SDD d'ordre 1 en dimension m la récurrente suivante :

$$x(0) = x_0 \in D, \;\; x(n+1) = f(x(n)), n \leq 0.$$

On utilisera souvent la notation (f, D) pour désigner le système dynamique défini par une fonction f sur l'ensemble D.

Définition 2.2. Étant donné le point initial x_0, on appelle **orbite (ou trajectoire)** du système (**??**) la suite

$$\mathcal{O}(x_0) = \{x(0) = x_0,\ x(1) = f(x(0)),\ \ldots,\ x(n+1) = f(x(n)),\ \ldots\}$$

Définition 2.3. On appelle "point fixe " d'un système dynamique tout point x_s tel que

$$x_s = F(x_s)$$

Parfois, ces points sont appelés aussi **points stationnaires** ou **points d'équilibre**.

Définition 2.4. Une orbite $\mathcal{O}(x_0)$ s'appelle **périodique** s'il existe un $p > 0$ t.q.

$$x(n+p) = x(n),\ \forall n \tag{2.1}$$

Une orbite périodique $\mathcal{O}(x_0)$ est toujours une suite de points périodique. Tous ces points s'appellent **point périodique de période** p du système.

Problème 1. Etude avec Scilab.

On peut représenter globalement les propriétés d'un système dynamique à l'aide d'un portrait de phase.

Un système dynamique discret de dimension 2 est décrit par deux équations :

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= f_1(x_1(n), x_2(n)) \\ x_2(n+1) &= f_2(x_1(n), x_2(n)) \end{aligned}$$

Pour tracer le portrait de phases d'un système dynamique défini par l'application $\vec{f}\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

on choisit sur le plan une grille de points (x_1, x_2) assez dense et l'on trace dans chaque point la direction du départ de l'orbite qui commence dans ce point. Cette direction pour un point initial $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est définie par le vecteur

$$\vec{x}(1) - \vec{x}(0) = \vec{f}(\vec{x}(0)) - \vec{x}(0)$$

Cela donne un aperçu de toutes les orbites possibles du système. Si l'on s'intéresse à une orbite particulière, on peut la retrouver sur le portrait de phases, en suivant les directions du champ de vecteurs tracées à partir du point initial de l'orbite en question.

On peut observer à l'aide d'un portrait de phases les points fixes du système. Ce sont les points tels que $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{x}$. Donc, le vecteur de direction du portrait de phases doit être nul dans un point fixe. Le comportement des orbites du système autour d'un point fixe est important. Le portrait de phases nous permet une première analyse qualitative de ce comportement.

Sur un portrait de phases on peut également apercevoir des orbites périodiques, si le système en a. Dans ce cas, on peut distinguer des courbes closes formées par un groupe de vecteurs de directions.

Nous allons tracer le portrait de phase des systèmes dynamiques linéaires définis par

$$x(0) = x_0 \in D,\ x(n+1) = Mx(n),\ \ n \geq 0$$

où M : 2×2 est une matrice réelle. Nous allons étudier 6 exemples avec les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \ E = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 1 & 0.5 \end{pmatrix}, \ F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

On utilisera le code fourni sur AREL. Il suffit d'exécuter le programme sous scilab. Il affiche les portraits de phase des systèmes définis par les matrices ci-dessus. Sur chaque plan sont tracés également quelques trajectoires. Pour chaque système, observez les lignes du champs de force et répondez aux questions suivantes

1. Pouvez vous repérer un ou plusieurs points fixes ?
2. Y a-t-il des orbites périodiques ?
3. Globalement, est ce que les orbites dy système convergent ou divergent ?
4. S'il y a convergence, quels sont les points limites ?

Problème 2. Soit A une matrice réelle 2×2. Soit un système dynamique défini dans $\mathbb{R}^2$ par

$$x_{n+1} = Ax_n$$

1. Comment peut on écrire le terme général d'une orbite, dont la condition initiale est connue, x_0 ?
2. Poser l'équation que doivent vérifier les points fixes. Quel point est toujours un point fixe d'un système linéaire ?
3. Peut il y avoir d'autres points fixes ? Si oui à quelle condition ? Trouver le lien entre les points fixes et les vecteurs propres de la matrice A.
4. A quelle condition il y a une orbite périodique de période p donnée ?
5. Pour les matrices de l'exercice précédent trouver les points fixes et périodiques.

Problème 3. Etude de convergence

1. Donner la définition à "x_n converge" quand $x_n \in \mathbb{R}^2$.
2. Si x_n est défini par la récurrence
$$x_{n+1} = Ax_n$$
et si x_n converge, que peut on dire de la limite ?
3. Trouver le lien entre la convergence et les valeurs propres de A.
4. Soient λ_1 et λ_2 deux valeurs propres de A. **Supposons qu'elles sont distinctes et réelles**. Soit $\{v_1, v_2\}$ la base de vecteurs propres associés. Etudier (en travaillant dans la base des vecteurs propres) la convergence dans les deux cas suivants.
   (a) $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| < 1$.
   (b) $|\lambda_1| > 1$ et $|\lambda_2| > 1$.
   (c) $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| > 1$.
   (d) $|\lambda_1| = 1$ et $|\lambda_2| < 1$.
   (e) $|\lambda_1| = 1$ et $|\lambda_2| > 1$.
5. Revenir aux portrait de phase pour confirmer les résultats.

3 Séance 10

Cette séance est consacrée à un travail autonome en classe. **La présence à cette séance est obligatoire.** On vous propose de résoudre un problème énoncé ci-dessous. A la fin de la séance de travail vous devez déposer sur AREL un résumé de 1-3 pages de vos résultats. Voici quelques recommandations pour la rédaction de ce document.

- Vous devez y exposer votre analyse du problème et la solution que vous avez imaginée.
- Il est fondamental que toute affirmation de votre part soit justifiée et argumentée avec la plus grande rigueur mathématique. C'est le points essentiel qui sera jugé.
- Si des résultats numériques ont été obtenus dans votre étude consacrez quelques lignes à leur analyse. Sont ils, selon vous, conformes aux attentes ?
- Décrivez la manière dont vous avez procédé pour trouver la solution, les sources documentaires que vous avez consultées (livres, notes de cours, web)
- Il n'est pas interdit de débattre de vos idées avec vos camarades de classe, mais votre rédaction doit rester strictement personnelle !

Problème 4. Etude de propagation d'erreurs par un système dynamique discret.

1. Soit un système linéaire
$$x_{n+1} = Ax_n$$
de matrice carrée $A : 2 \times 2$. Soient λ_1 et λ_2 deux valeurs propres de A. **Supposons qu'elles sont distinctes et réelles**. Soit $\{v_1, v_2\}$ la base de vecteurs propres associés. Supposons que la condition initiale x_0 est connue avec une incertitude de
$$\Delta x = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{pmatrix}$$
Quelle sera l'erreur sur x_n après n itérations ? Faire une étude de cas comme dans le problème 3.
2. Soit une application
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
et un système dynamique associé
$$x_{n+1} = f(x_n),\ x_0 \in \mathbb{R}^2$$
Si on connaît x_n avec une erreur Δx_n. Trouver une expression pour l'erreur sur x_{n+1} à partir du développement de Taylor d'ordre 1.

Problème 5. Etude d'une approximation discrète d'un système d'équations différentielles

Soit un système d'équations différentielles
$$X' = AX$$
où $X(t) = (x_1(t), x_2(t))^T \in \mathbb{R}^2,\ \ A : 2 \times 2$. Soient λ_1 et λ_2 deux valeurs propres de A. **Supposons qu'elles sont distinctes et réelles**. On souhaite résoudre numériquement le problème de Cauchy associé :
$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

sur l'intervalle de temps $t \in [0, T]$. Pour cela on recherche les valeurs approchées de la solution aux points d'une subdivision de l'intervalle de temps $t \in [0, T]$ de pas $\Delta t > 0$:

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T, \;\; \Delta t = \frac{T}{n}, \; t_k = k \cdot \Delta t$$

On se propose de construire les valeurs approchées $Y_k \cong X(t_k)$ selon la récurrence suivante :

$$Y_0 = X_0, \;\; Y_{k+1} = Y_k + \Delta t * AY_k$$

Cette méthode s'appelle 'Méthode d'Euler". Nous allons l'utiliser dans la séance suivante. Ici notre objectif est d'étudier la propagation d'erreurs dans un tel algorithme.

1. On note $B = I + \Delta t A$ la matrice de la méthode d'Euler. Exprimer les valeurs propres de B en fonction de celles de A
2. Faire une analyse de propagation des erreurs en fonction des valeurs propres de la matrice A et du choix de pas Δt.