0.1 Etude de convergence

Soit $x_n \in \mathbb{R}^2$. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si :

$$\exists(a,b) \in \mathbb{R}^2, \lim_{n\to\infty} x_n = (a,b)$$

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On définit x_n par la récurrence :

$$x_{n+1} = Ax_n$$

Montrons que P_n : $(\forall n \in \mathbb{N}, x_n = A^n x_0)$ par récurrence :

- Pour n = 0, nous avons

$$x_0 = A^0 x_0 = I_2 x_0 = x_0$$

.

- Supposons que P_n est vraie. Par conséquent,

$$x_{n+1} = Ax_n = AA^n x_0 = A^{n+1} x_0$$

Ainsi, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ses points fixes, donc vers les vecteurs propres de la matrice A.

Soient $\lambda_1 \in Sp(A)$ et $\lambda_2 \in Sp(A)$ tels que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, et $\{v_1, v_2\}$ la base de vecteurs propres associés.

Alors $Av_1 = \lambda_1 v_1, Av_2 = \lambda_2 v_2$, et $\{v_1, v_2\}$ étant une base de $\mathbb{R}^2$,

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \exists(a,b) \in \mathbb{R}^2, x = av_1 + bv_2$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
& x_n = A^n x_0 \\
\Leftrightarrow\ & \exists(a,b) \in \mathbb{R}^2, x_n = A^n(av_1 + bv_2) \\
\Leftrightarrow\ & \exists(a,b) \in \mathbb{R}^2, x_n = aA^n v_1 + bA^n v_2 \\
\Leftrightarrow\ & \exists(a,b) \in \mathbb{R}^2, x_n = a\lambda_1^n v_1 + b\lambda_2^n v_2
\end{aligned}$$

Nous étudierons la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selon les valeurs de λ_1 et λ_2

- Si $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| < 1$, $(\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\lambda_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

- Si $|\lambda_1| > 1$ et $|\lambda_2| > 1$, $(\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\lambda_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
- Si $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| > 1$, $(\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et $(\lambda_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
- Si $|\lambda_1| = 1$ et $|\lambda_2| < 1$, $(\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 et $(\lambda_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers av_1.
- Si $|\lambda_1| = 1$ et $|\lambda_2| > 1$, $(\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et $(\lambda_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Nous revenons aux portraits de phase des matrices étudiés dans le problème 1

- $\chi_C(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 \\ 1 & \frac{1}{2}-X \end{vmatrix} = (1-X)(\frac{1}{2}-X) \Rightarrow Sp(C) = \{\frac{1}{2}, 1\}$.
  Or, nous pouvons constater que les orbites convergent vers la droite $y = 2x$, ce qui s'accorde avec le quatrième cas.
- $\chi_F(X) = \begin{vmatrix} 2-X & 0 \\ 1 & \frac{1}{2}-X \end{vmatrix} = (2-X)(\frac{1}{2}-X) \Rightarrow Sp(F) = \{\frac{1}{2}, 2\}$.
  Or, nous pouvons constater que les orbites divergent, ce qui s'accorde avec le troisième cas.