MODÉLISATION MATHÉMATIQUE

Séances 9-10

THÈME : Analyse dans $\mathbb{R}^n$

4 avril 2013

Table des matières

1 Introduction

Ces deux séances seront consacrées à l'étude des fonctions réelles de plusieurs variables et leurs applications.

2 Séance 9

2.1 Dérivés et analyse d'erreurs

Les fonctions réelles, d'une ou plusieurs variables, sont utilisées pour représenter des relations entre plusieurs quantités. Par exemple, on exprime l'aire d'un rectangle S en fonction des longueurs de ses côtés

$$S = a \cdot b,$$

ou le volume d'un cône

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$$

en fonction de sa hauteur et du rayon de sa base. Dans certains cas, on peut trouver une expression directe donnant une quantité en fonction d'une ou plusieurs autres. C'est le cas dans les exemples géométriques cités ci-dessus. Il s'agit alors d'une définition explicite. Parfois, on définit une fonction par une relation, une équation qu'elle doit vérifier. Par exemple, relation entre les coordonnées x et y d'un point de cercle de rayon 1 centré en zéro se décrit par l'équation

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Il s'agit alors d'une définition implicite.

Nous allons étudier ici la question de sensibilité d'une quantité par rapport aux différentes valeurs qui la déterminent. Il arrive en effet très souvent dans les applications que certaines valeurs sont connues avec des erreurs. Il peut s'agir par exemple d'erreurs de mesure. Si on utilise ces données erronées pour évaluer d'autres grandeurs à travers des fonctions, explicites ou implicites, comment estimer l'impact de ces incertitudes ? Par exemple, si les cotés d'un rectangle sont mesurés avec un appareil dont la marge d'erreur est de $1m$, quelle est la marge d'erreur sur l'aire calculée ?

Problème 1. Comment évaluer l'incertitude ? Cas simple :

– Considérons d'abord un cas simple : une fonction réelle d'une variable, qu'on suppose dérivable :

$$y = f(x).$$

Supposons que la mesure de x_0 est entachée d'une erreur de Δx. On souhaite évaluer

$$\Delta f := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Donner une approximation d'ordre 1 en Δx en utilisant la première dérivée de f.

– On appelle erreur relative le rapport de l'erreur sur la quantité mesurée :

$$\delta x := \frac{\Delta x}{x}, \ \ \delta f := \frac{\Delta f}{f}.$$

Exprimer l'erreur relative sur f en utilisant la dérivée de $\ln |f|$.

– Evaluer l'erreur de calcul d'aire de disque de rayon r quand $r = r_0 = 2m$, avec $\Delta r = 0.1m$.

Problème 2. Comment évaluer l'incertitude ? Fonctions de plusieurs variables :

– Considérons une fonction réelle de deux variables réelles :

$$z = f(x, y).$$

Supposons que la mesure de x_0 est entachée d'une erreur de Δx et que la mesure de y_0 est entachée d'une erreur de Δy. On souhaite évaluer

$$\Delta f := f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Donner une approximation d'ordre 1 en Δx, Δy en utilisant les premières dérivées partielles de f.

– Exprimer l'erreur relative sur f en utilisant les dérivées partielles de $\ln |f|$.

Problème 3. Estimation d'erreur de position
On se trouve à bord d'un véhicule qui se déplace en ligne droite. On suppose que l'on connaît la position initiale, x_0 et la vitesse initiale v_0. On dispose d'un appareil de mesure d'accélération, un accéléromètre, qui effectue des mesures 10 fois par seconde. On supposera qu'entre deux mesures consécutives, l'accélération reste constante.

- **Première mesure :** A l'instant $t = t_1 = 0.1s$, on mesure l'accélération $a_1\ ms^{-2}$. Exprimer la vitesse v_1 et la position x_1 en fonction de x_0, v_0 et a_1.
- On suppose que la position initiale est connue avec une erreur $\Delta x_0 = 1m$, la vitesse initiale avec l'erreur $\Delta v_0 = 1ms^{-1}$ et que l'accéléromètre commet, à chaque mesure une erreur de l'ordre de $\Delta a = 1ms^{-2}$. Estimer les erreurs Δv_1 et Δx_1.
- **Deuxième mesure :** En reprenant le même raisonnement sur l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$ avec $t_1 = 0.1s$ et $t_2 = 0.2s$, estimer les erreurs Δv_2 et Δx_2.
- **En général :** Etablir une relation de récurrence pour Δv_n et Δx_n en utilisant la modélisation sur l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$. Montrer que l'erreur sur la vitesse grandit de façon linéaire en temps (en n) et que l'erreur de position est croissante comme n^2.

2.2 Distances dans $\mathbb{R}^n$

Problème 4.

- Dans un plan, quel est le plus court chemin entre deux points donnés ?.
- Trouver le plus court chemin entre le point $A(1, 1)$ et le carré de côté 1 centré en $B(3, 3)$.
- Trouvez le plus court chemin entre le point $A(1, 1)$ et le disque de rayon 1 centré en $C(-1, 4)$.
- Le point de départ est $A(1, 3)$. Le point d'arrivée doit se situer sur le demi-disque supérieur du cercle unité centrée en $O(0, 0)$. Sur le chemin on doit toucher la droite $x = 3$ en un point. Trouver le plus court chemin.
- **La course dans tous les sens :** Le point de départ est l'origine $A(1, 1)$. On doit parcourir en ligne droite la distance D. Le score final est la somme des valeurs absolues de vos coordonnées. Trouver la meilleure direction, celle qui maximise le score.
  Indication : Cherchez d'abord une solution géométrique.

3 Séance 8. Application pratique d'optimisation et étude des sensibilités

Cette séance est consacrée à un travail autonome en classe. La présence à cette séance est obligatoire. On vous propose de résoudre un problème énoncé ci-dessous. A la fin de la séance de travail vous devez déposer sur AREL un résumé de 1-3 pages de vos résultats. Voici quelques recommandations pour la rédaction de ce document.

- Vous devez y exposer votre analyse du problème et la solution que vous avez imaginée.
- Il est fondamental que toute affirmation de votre part soit justifiée et argumentée avec la plus grande rigueur mathématique. C'est le point essentiel qui sera jugé.
- Si des résultats numérique ont été obtenus dans votre étude, consacrez quelques lignes à leur analyse. Sont-ils selon vous, conformes aux attentes ?.
- Décrivez la manière dont vous avez procédé pour trouver la solution, les sources documentaires que vous avez consultées (livres, notes de cours, web, etc...).
- Il n'est pas interdit de débattre de vos idées avec vos camarades de classe, mais votre rédaction doit rester strivement personnelle ! !

Problème 5. Un fabricant de boîtes de conserves cherche à minimiser les quantités de matériaux nécessaires pour fabriquer des boîtes de volume donné, V. L'objectif de ce problème est de trouver des formes optimales.

Boîtes cylindriques :

Supposons qu'il s'agit de fabriquer des boîtes cylindriques de rayon r, de hauteur h et de volume donné V.

- Les couvercles ronds des boîtes sont découpés dans des carrés de côté $2r$. Exprimer la surface totale S_1 de métal (pertes incluses) utilisée pour une boîte.
- Puisque le volume doit être constant, V, exprimer la surface en fonction d'un seul paramètre, r. Puis trouver la valeur r_0 qui minimise S_1.
- En remplaçant V par son expression en fonction de h et de r, trouver le rapport $t_0 = \frac{r_0}{h_0}$ de rayon et de hauteur de boîte optimal.
- Pour faire plus d'économies de métal, on décide de découper les couvercles non pas dans des carrés mais dans des hexagones. Expliquer pourquoi, à rayon de cercle égal, les pertes seront moindres que si on découpait dans des carrés.
- Calculer la surface totale S_2 utilisée pour fabriquer une boîte et trouver, comme dans le cas précédent, la valeur de rapport $t_1 = \frac{r_1}{h_1}$ qui minimise la quantité de métal utilisée.

Calibrage :

`Attention Dans cette partie il faut absolument prendre en compte des unités de mesure dans les calculs !`

- Un client a commandé des boîtes cylindriques de volume $V = 125ml$. De quelle hauteur h et quel rayon r (en centimètres) seront alors les boîtes aux proportions optimales (qui minimisent la quantité de métal utilisée)..
- Le client exige que le volume de boîte soit garanti avec une précision de $\Delta V = 0.1ml$. Les machines qui découpent les pièces dans le métal sont réglées de façon à garantir la précision de $\Delta r = 1mm$ sur le rayon d'un disque et de $\Delta h = 1mm$ sur la hauteur. Estimer l'erreur de volume que cela entraîne. Est-ce que ces réglages sont conformes aux exigences du client ?.
- Proposez des réglages de précision de découpe pour le rayon et la hauteur pour que les exigences de précision sur le volume soient respectées.
- Les imprécisions des découpes posent un autre problème technique. Avec les derniers réglages que vous proposez, est-il possible qu'une boîte ne puisse pas être assemblée à partir des pièces découpées ? Justifiez votre réponse.