Whatever

Sébastien Pedreau
Christian Ingouff

Année 2012/2013
Semestre 4

0.1 Problème 5 : Fabrication de boîtes de conserve

0.1.1 Découpage des couvercles dans des carrés

Le problème réside dans l'optimisation des dimensions d'une boîte de conserve afin de minimiser la quantité de matériaux nécessaires à sa fabrication.

On veut fabriquer des boîtes cylindriques de rayon r et de hauteur h, d'un volume donné V. Si on considère que les couvercles ronds des boîtes sont découpés dans des carrés de côté $2r$, on peut exprimer la surface totale de métal S_1 utilisée pour une boîte ainsi :

$$S_1(r,h) = 2 \times 4r^2 + 2\pi rh$$

Comme le volume du cylindre $V = \pi r^2 h$ est donné, on peut exprimer la surface de cette manière :

$$S_1(r) = 8r^2 + \frac{2V}{r}$$

S_1 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$S_1'(r) = 16r - \frac{2V}{r^2}$$

S_1 est croissante si et seulement si

$$\begin{aligned} & S_1'(r) \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 > 16r \geq \frac{2V}{r^2} \\ \Leftrightarrow \quad & 0 > r^3 \geq \frac{V}{8} \\ \Leftrightarrow \quad & 0 > r \geq \frac{\sqrt[3]{V}}{2} \end{aligned}$$

On déduit alors le rayon r_0 qui minimise S_1

$$r_0 = \frac{\sqrt[3]{V}}{2}$$

On trouve par extension la hauteur optimale h_0

$$\begin{aligned} & r_0 = \frac{\sqrt[3]{\pi r_0^2 h_0}}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & 8r_0^3 = \pi r_0^2 h_0 \\ \Leftrightarrow \quad & h_0 = \frac{8r_0}{\pi} \end{aligned}$$

Ainsi, on peut définir le rapport $t_0 = \frac{r_0}{h_0}$ de rayon et de hauteur de boîte optimal

$$t_0 = \frac{r_0}{h_0} = \frac{\pi}{8}$$

0.1.2 Découpage des couvercles dans des hexagones

On considère maintenant le découpage des couvercles dans des hexagones de métal réguliers : les couvercles décrivent donc le cercle circonscrit aux hexagones. La surface totale de métal S_2 utilisée pour une boîte dans ce cas est

$$S_2(r,h) = 2 \times 2\sqrt{3}r^2 + 2\pi rh$$

On dénote que $\forall r > 0, 2\sqrt{3}r^2 < 4r^2$, donc la quantité de métal utilisée pour les couvercles avec des hexagones est inférieure à celle avec des carrés. Ainsi, les pertes ici sont moindres.

De la même manière que précédemment,

$$S_2(r) = 4\sqrt{3}r^2 + \frac{2V}{r}$$

et

$$S_2'(r) = 8\sqrt{3}r - \frac{2V}{r^2}$$

S_2 est croissante si et seulement si

$$\begin{aligned} & S_1'(r) \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 > 8\sqrt{3}r \geq \frac{2V}{r^2} \\ \Leftrightarrow \quad & 0 > r^3 \geq \frac{V}{4\sqrt{3}} \\ \Leftrightarrow \quad & 0 > r \geq \sqrt[3]{\frac{V}{4\sqrt{3}}} \end{aligned}$$

On déduit le rayon r_1 et la hauteur h_1 optimaux, ainsi que le rapport optimal t_1 comme précédemment

$$r_1 = \sqrt[3]{\frac{V}{4\sqrt{3}}}$$

$$h_1 = \frac{4\sqrt{3}}{\pi} r_1$$

$$t_1 = \frac{r_1}{h_1} = \frac{\pi}{4\sqrt{3}}$$

0.1.3 Application numérique

Un client commande des boîtes cylindriques de volume
$V = 125$ mL $= 125$ cm^3 avec une précision de $\Delta V = 0.1$ mL : il nous incombe de nous occuper de cette tâche de manière optimale.
Si on découpe les couvercles dans des hexagones de métal, le rayon r et la hauteur h seront

$$r = \sqrt[3]{\frac{125}{4\sqrt{3}}} = 2.62 \text{ cm}$$

$$h = \frac{4\sqrt{3} \times \sqrt[3]{\frac{125}{4\sqrt{3}}}}{\pi} = 5.78 \text{ cm}$$

Les machines sont initialement réglées avec une précision de $\Delta r = 1$ mm $= 0.1$ cm sur le rayon et de $\Delta h = 1$ mm $= 0.1$ cm sur la hauteur. L'erreur de volume ΔV que cela entraîne est

$$\Delta V = \pi(r + \Delta r)^2(h + \Delta h) - 125 = 12.04 \text{ mL}$$

ce qui est trop important.

Pour répondre aux exigences du client, il faut satisfaire l'équation suivante

$$\begin{aligned} & \pi(r + \Delta r)^2(h + \Delta h) = 125.1 \text{ mL} \\ \Leftrightarrow \quad & \pi(r + \Delta r)^2(r + \Delta r) \times \frac{4\sqrt{3}}{\pi} = 125.1 \text{ mL} \\ \Leftrightarrow \quad & 4\sqrt{3}(r + \Delta r)^3 = 125.1 \text{ mL} \\ \Leftrightarrow \quad & r^3 + 3\Delta r r^2 + 3\Delta r^2 r + \Delta r^3 = \frac{125.1}{4\sqrt{3}} \end{aligned}$$

On choisit de négliger Δr^2 et Δr^3, d'où

$$\Delta r = \frac{\frac{125.1}{4\sqrt{3}} - r^3}{r^2} = 0.01cm$$

et

$$\Delta h = \frac{4\sqrt{3}}{\pi} r = 0.02cm$$

Cependant, il est encore possible qu'avec les derniers réglages, une boîte ne puisse pas être assemblée : en effet, si un couvercle est trop petit, il ne pourra pas être concaténé au corps de la boîte. Une combine serait d'augmenter le rayon optimal de Δr, car un excès de mesure est encore rattrapable.