MODÉLISATION MATHÉMATIQUE

Séances 13-14

THÈME : Évaluation numérique de volumes

16 mai 2013

Table des matières

1 Introduction

Cette séance sera consacrée aux différentes techniques de calcul de volumes.

2 Volumes de révolution

On appelle solide de révolution une forme géométrique que l'on peut obtenir par rotation d'un domaine du plan Ω autour d'un axe donné, faisant partie ou non du domaine. Par exemple, on obtient un cylindre par rotation d'un rectangle autour d'un de ses cotés. On obtient un cône par rotation d'un triangle rectangle autour d'un de ses cotés de l'angle droit. On obtient un tore de section ronde par rotation d'un disque autour d'un axe extérieur à ce disque.

Il est possible exprimer le volume d'un tel solide sous forme d'intégrale d'une fonction d'une seule variable. Il s'agit du principe de Cavalieri. Supposons que le domaine Ω est délimité par le graphe d'une fonction $f(x)$ pour $x \in [a, b]$, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ et l'axe des abscisses. Considérons le volume obtenu par rotation de ce domaine autour de l'axe des abscisses. Chaque section par un plan d'équation $x = x_0$ de ce volume est un disque de rayon $f(x_0)$ dont l'aire est égale à

$$S(x_0) = \pi f(x_0)^2$$

Alors le volume du solide de révolution est égal à

$$V = \int_a^b S(x)dx = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Problème 1. En utilisant ce principe calculez les volumes

1. d'un cône de hauteur $h = 4cm$ et de rayon de base $r = 1$cm.
2. d'une sphère de rayon 2 cm
3. d'un paraboloïde ellipsoïdal engendré par rotation autour de l'axe des abscisses du domaine délimité par la courbe d'équation $y = \sqrt{2x - 4}$ sur le segment $x \in [2, 7]$, la droite d'équation $x = 7$ et l'axe des abscisses.

Problème 2. En s'il y a des trous ?

Généraliser le principe de calcul aux solides de rotation engendrés par rotation d'un domaine autour d'un axe extérieur. Considérer le cas où le domaine est défini par

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ a \leq x \leq b,\ \ 0 < g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

Calculer les volumes

1. d'un tore de section carrée obtenu par rotation du carré

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ 1 \leq x \leq 2,\ \ 2 \leq y \leq 3\}$$

   autour de l'axe des abscisses.
2. du solide obtenu par rotation autour de l'axe des abscisses du domaine compris entre les courbes $y = x^2$ et $y = x^{1/3}$.

3 Calcul approché de volumes par simulation

Tous les volumes ne peuvent pas être obtenus pas révolution. Dans certains cas, s'il est possible d'encadrer le volume par le graphe d'une fonction de deux variables $f(x, y)$ sur un domaine du plan $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ le volume sous le graphe de f s'exprime sous forme intégrale

$$V = \int_\Omega f(x, y)dxdy$$

Dans tous les cas, il peut arriver que la fonction impliquée dans le calcul intégral n'admette pas de quadrature facile. Le seul recours qui reste alors réside dans l'évaluation approchée numérique de l'intégrale. Il existe de nombreuses techniques de calcul approché d'intégrales qui s'appuient sur la définition d'une subdivision et l'analyse précise des qualités de la fonction intégrée. Ces techniques sont très performantes pour les fonctions d'une seule variable mais leur précision diminue si la fonction intégrée est de plusieurs variables. On est alors obligés d'augmenter la finesse de la subdivision pour maintenir le même niveau de précision. Cela augmente aussi le nombre de calculs nécessaires.

Nous allons nous intéresser ici à une approche alternative de calcul approché d'intégrales et de volumes qui utilise des nombres pseudo-aléatoires. Nous utiliserons la notion de nombres aléatoire distribués uniformément sur un intervalle donné $[a, b]$ (ou, plus généralement, sur un pavé dans $\mathbb{R}^n$). On peut assimiler cette distribution au jeu de fléchettes dans lequel on lance des fléchette sur ne cible donnée, par exemple, sur un intervalle $[a, b]$. On suppose que tous les points de l'intervalle ont la même chance d'être atteints et que la fléchette atteint toujours l'intervalle $[a, b]$. Comme on ne peut pas quantifier le nombre total de points dans un intervalle, on exprime les probabilités en termes de sous-intervalles de la cible.

Ainsi on suppose que la probabilité d'atteindre n'importe quel sous-intervalle $[c, d] \subset [a, b]$ est proportionnelle à la longueur de ce dernier. Comme dans nos hypothèses il est impossible de rater la cible, la probabilité de l'intervalle $[a, b]$ est égale à 1. Alors la probabilité d'atteindre un sous-intervalle est

$$P[c \leq x \leq d] = \frac{d-c}{b-a}$$

Enfin, on utilisera ici la transformation affine qui permet de passer de l'intervalle $[0, 1]$ à n'importe quel intervalle $[a, b]$:

$$\phi(t) = (b-a)t + a$$

Nous allons pouvoir générer à l'aide de scilab des nombres aléatoires uniformément distribués sur l'intervalle $[0, 1]$. Si U est un tel nombre alors

$$X = (b-a)U + a$$

est uniformément distribué sur $[a; b]$.

3.1 Calcul par simulation d'intégrales de fonctions d'une variable

Soit une intégrale

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Il existe deux approches différentes de simulation qui exploitent deux interprétations d'intégrale.

Méthode de moyenne On utilise ici la notion de moyenne d'une fonction sur l'intervalle $[a, b]$:

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Si on arrivait à calculer de manière approchée la moyenne de valeurs de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$. Il suffit pour cela de générer un grand nombre de points $x_i,\ i = 1, \ldots, N$ uniformément distribués sur l'intervalle d'intégration $[a, b]$ et de calculer la moyenne de valeurs de f à ces points :

$$\mu \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)$$

On en déduit une approximation de la valeur de l'intégrale :

$$I \simeq (b - a) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)$$

L'algorithme de calcul peut alors se résumer de la façon suivante.

```
 Choisir N,  nombre de points
 Générer  N  nombres aléatoires sur  [0,1]
  et les stocker dans un tableau U
  S=0
  Pour tout i=1:N faire
         S=S+ f(a+(b-a)U[i])
  fin Pour
Calculer la moyenne  mu=S/N;
calculer l'intégrale: I=(b-a)*mu;
```

Méthode de rejet-acceptation On utilise ici le fait que l'intégrale d'une fonction réelle sur un intervalle est égale à l'aire sous le graphe de la fonction. On simule alors un jeu de fléchettes avec une cible rectangulaire dans le plan :

$$C = [a, b] \times [0, M]$$

où

$$M \geq \max_{x \in [a,b]} f(x)$$

Par analogie avec le cas d'un cible intervalle, si les fléchettes sont tirées de façon uniforme, la probabilité de tomber dans une zone particulière du rectangle est proportionnelle à l'aire de la zone en question. Donc la probabilité qu'une fléchette tombe sous le graphe de la fonction $f(x)$ est proportionnelle à l'intégrale I :

$$P = \frac{I}{Aire(C)} = \frac{I}{M(b - a)}$$

Alors on cherche à approcher la valeur de la probabilité P. Pour cela on effectue un grand nombre N de tirages aléatoires de points dans le rectangle $[a, b] \times [0, M]$. La probabilité P peut être approchée par la proportion dans le tirage effectué de points qui se trouvent sous le graphe de la fonction $f(x)$:

$$P \simeq \frac{card\{(x, y) \text{ t.q } y \leq f(x)\}}{N}$$

L'algorithme de calcul peut alors se résumer de la façon suivante.

```
Choisir  N  nombre de points
Générer  N  nombres aléatoires sur  [0,1]
 et les stocker dans un tableau U
Générer  N  nombres aléatoires sur  [0,1]
et les stocker dans un tableau V
 Initialiser le compteur de points: cpt=0;
 Pour tout i=1:N faire
     //Calculer les coordonnées (X,Y) du ième point dans [a,b]\times
         X=a+(b-a)*U[i]; // coordonnée X du ième point
         Y=M*V[i]; // coordonnée Y du ième point
     // Vérifier si le point se trouve sous graphe de f(x):
      si Y<=f(X)
         alors cpt=cpt+1;

 fin Pour
Calculer la proportion de points sous le graphe: P=cpt/N;
calculer l'intégrale: I=M*(b-a)*P;
```

Problème 3. 1. Ecrire un programme scilab qui calcule l'intégrale d'une fonction donnée f sur un intervalle donné $[a, b]$ par la méthode de la moyenne. Tester le programme sur les exemples de l'exercice 1 en faisant varier le nombre de points tirés : $N = 100, 1000, 10000, 100000$. Dresser un tableau de valeurs approchées en fonction de nombre de points tirés N. Faire des conclusions sur la précision des calculs en fonction de N.

2. Ecrire un programme scilab qui calcule l'intégrale d'une fonction donnée f sur un intervalle donné $[a, b]$ par la méthode de rejet acceptation. Tester le programme sur les exemples de l'exercice 2 en faisant varier le nombre de points tirés : $N = 100, 1000, 10000, 100000$. Dresser un tableau de valeurs approchées en fonction de nombre de points tirés N. Faire des conclusions sur la précision des calculs en fonction de N.
3. Comparer les deux méthodes.

Problème 4. 1. Adapter la méthode de la moyenne pour calculer un volume compris sous le graphe d'une fonction de deux variables. Ecrire un programme scilab qui permet de calculer un tel volume.

2. Utiliser votre programme pour calculer le volume contenu sous le graphe de la fonction
$$f(x, y) = (1 - y) * (2 + \sin(5\pi x)), \ \ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$$
3. Calculer le volume manuellement (en calculant l'intégrale) et dresser le tableau de valeurs approchées en fonction de $N = 100, 1000, 10000, 100000$ en les comparant avec la valeur exacte.

Problème 5. 1. Adapter la méthode de rejet et acceptation pour calculer un volume décrit par un système d'inégalités
$$\begin{cases} f_1(x, y, z) \leq 0 \\ \dots \\ f_p(x, y, z) \leq 0 \end{cases}$$

Ecrire un programme scilab qui permet de calculer un tel volume.

2. Utiliser votre programme pour calculer le volume d'une sphère centrée en zéro de rayon r définie par l'inégalité
$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 \leq 0$$
Dresser le tableau de valeurs approchées en fonction de $N = 100, 1000, 10000, 100000$ en les comparant avec la valeur exacte.

3. Utiliser votre programme pour calculer le volume d'une sphère centrée en zéro de rayon r définie par l'inégalité
$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 \leq 0$$
Dresser le tableau de valeurs approchées en fonction de $N = 100, 1000, 10000, 100000$ en les comparant avec la valeur exacte.

4. Soit le repère (O, i, j, k) dans l'espace. On socidère une sphère centrée en O de rayon $R = 3$. Soit le rectangle A, B, C, D dans le plan (O, i, k) de sommets
$$A(2,0,-2), B(4,0,-2), C(4,0,4), D(2,0,4)$$
On considère le cylindre obtenu par révolution du rectangle $ABCD$ autour de son coté AD. Utiliser le programme pour calculer le volume d'intersection du cylindre et de la sphère.