Calculs approchés de volume

Sébastien Pedreau
Christian Ingouff

Année 2012/2013
Semestre 4

Sommaire

Chapitre 1

Calculs de volume

1.1 Introduction

Nous connaissons de nombreuses façons mathématiques de calculer les volumes, comme la méthode par révolution. Cela permet de nombreuses applications pratiques dans notre monde, que ce soit pour un simple déménagement ou pour calculer le carburant nécessaire au décollage d'une fusée.

Cependant, certains calculs de volume sont difficiles à calculer, et nécessiteront des calculs approchés. Nous étudierons deux méthodes de calculs approchés dans ce rapport : la méthode de moyenne, et la méthode de rejet-acceptation.

1.2 Méthodes

Pour la description des deux différentes méthodes, nous ferons nos calculs sur $\mathbb{R}^2$ ou sur des intervalles [a ; b], avec a et b deux réels. De plus, nous poserons :

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

1.2.1 Méthode de moyenne

On utilise ici la notion de moyenne μ d'une fonction f définie et continue sur un intervalle [a ; b] tel que :

$$\mu = \frac{1}{Aire} \iint f(x,y)\,\mathrm{d}x dy$$

$$\to \mu \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1;j=1}^{N} f(x_i, y_j)$$

Ce qui nous permet de faire l'approximation suivante :

$$\rightarrow I \approx \frac{b-a}{N} \sum_{i=1;j=1}^{N} f(x_i, y_j)$$

<u>NB :</u> La somme permet de générer N couples (x, y)

1.2.2 Méthode de rejet-acceptation

La méthode de rejet-acceptation se base sur le fait que nous pouvons associer le calcul d'intégrale d'une fonction au calcul de l'aire sous la courbe représentant cette fonction.

Nous simulons donc un jeu de fléchettes en 3 dimensions, dans lequel nous lançons nos projectiles dans une sphère. Ces projectiles s'arrêtent à un endroit aléatoire dans la sphère. Si toutes les fléchettes sont lancées de la même manière, la probabilité qu'elles tombent dans une zone particulière est liée à sa taille : plus une zone sera grande, plus les fléchettes auront de chance de l'atteindre. Cette probabilité P peut être définie telle que :

$$P = \frac{Volume\ de\ la\ zone}{Volume\ total}$$

Ainsi, la probabilité qu'une fléchette tombe dans le volume défini par une fonction f(x) dans la sphère S de rayon R peut se définir telle que :

$$P = \frac{I}{Volume\ de\ S} = \frac{I}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

On cherche alors à approcher la valeur de la probabilité P. Pour cela, il nous faut effectuer un grand nombre N de tirages aléatoires das le volume V. Si on définit P comme la probabilité qu'une fléchette tombe dans le volume défini par f, on a alors :

$$P = \frac{card\{(x,\ y,\ z)\ tel\ que\ y \leq f(x)\}}{N}$$

1.3 Résultats

1.3.1 Méthode de la moyenne

Cone

On travaillera ici dans un cone de hauteur 4cm et de rayon de base 1cm.

Nous allons faire plusieurs tirages avec un algorithme de méthode de la moyenne grâce à l'outil informatique Scilab, en faisant varier le nombre N de points, ce qui nous permet de remplir le tableau suivant :

N	100	1000	10000	100000
V moyen obtenu	4.309	4.008	4.221	4.186

Le résultat exact attendu était $\frac{4}{3}\pi \approx 4.189$. On remarque donc que plus le nombre N est grand, plus le résultat est précis.

Sphère

On travaillera ici dans une sphère de rayon 2cm.

Nous allons faire plusieurs tirages avec un algorithme de méthode de la moyenne grâce à l'outil informatique Scilab, en faisant varier le nombre N de points, ce qui nous permet de remplir le tableau suivant :

N	100	1000	10000	100000
V moyen obtenu	32.934	33.738	33.580	33.550

Le résultat exact attendu était $\frac{32}{3}\pi \approx 32.510$. On remarque donc que plus le nombre N est grand, plus le résultat est précis.

Paraboloïde

On travaillera ici dans un paraboloïde ellipsoïdal engendré par rotation autour de l'axe des abscisses du domaine délimité par la courbe d'équation $y = \sqrt{2x-4}$ sur le segment $x \in [2,\ 7]$, la droite d'équation x = 7 et l'axe des abscisses.

Nous allons faire plusieurs tirages avec un algorithme de méthode de la moyenne grâce à l'outil informatique Scilab, en faisant varier le nombre N de points, ce qui nous permet de remplir le tableau suivant :

N	100	1000	10000	100000
V moyen obtenu	73.462	79.398	78.153	78.587

Le résultat exact attendu était $\approx$. On remarque donc que plus le nombre N est grand, plus le résultat est précis.

Volume Quelconque

On suppose une fonction f telle que :

$$f(x) = (1 - y) * (2 + sin(5\pi x)),\ (x,\ y) \in [0,\ 1] \times [0,\ 1]$$

Calculons le volume V représenté par l'intégrale de f :

$$V = \iint f(x, y)\,\mathrm{d}x dy$$

$$\rightarrow V = \iint (1 - y) * (2 + sin(5\pi x))\,\mathrm{d}x dy$$

$$\rightarrow V = \iint 2\,\mathrm{d}x dy + \iint sin(5\pi x)\,\mathrm{d}x dy - \iint 2y\,\mathrm{d}x dy - \iint y\,sin(5\pi x)\,\mathrm{d}x dy$$

$$\rightarrow V = 1 + \frac{1}{5\pi} = 1.0637$$

Le tableau des valeurs de V obtenues avec Scilab :

N	100	1000	10000	100000
V moyen obtenu	1.1489	1.0736	1.06048	1.06046

Le résultat exact attendu était $V \approx 1.0637$ comme montré dans le précédent calcul. On remarque donc que plus le nombre N est grand, plus le résultat est précis.

1.3.2 Méthode de rejet et acceptation

Tore

On travaillera ici dans un tore de section carrée engendré par la rotation du carré :

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 1 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 3\}$$

Nous allons faire plusieurs tirages avec un algorithme de méthode de la moyenne grâce à l'outil informatique Scilab, en faisant varier le nombre N de points, ce qui nous permet de remplir le tableau suivant :

N	100	1000	10000	100000
Moyenne obtenue	4.309707	4.0084027	4.2206195	4.1858128

Le résultat exact attendu était $\approx$. On remarque donc que plus le nombre N est grand, plus le résultat est précis.

Solide

On travaillera ici dans un solide obtenu par rotation autour de l'axe des abscisses du domaine compris entre les courbes y = x^2 et y = $x^{\frac{1}{3}}$.

Nous allons faire plusieurs tirages avec un algorithme de méthode de la moyenne grâce à l'outil informatique Scilab, en faisant varier le nombre N de points, ce qui nous permet de remplir le tableau suivant :

N	100	1000	10000	100000
Moyenne obtenue	4.309707	4.0084027	4.2206195	4.1858128

Le résultat exact attendu était ≈. On remarque donc que plus le nombre N est grand, plus le résultat est précis.

Sphère

On travaillera ici dans une sphère centrée en zéro de rayon r définie par l'inégalité $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 \leq 0$.

Nous allons faire plusieurs tirages avec un algorithme de méthode de la moyenne grâce à l'outil informatique Scilab, en faisant varier le nombre N de points, ce qui nous permet de remplir le tableau suivant :

N	100	1000	10000	100000
Moyenne obtenue	4.309707	4.0084027	4.2206195	4.1858128

Le résultat exact attendu était ≈. On remarque donc que plus le nombre N est grand, plus le résultat est précis.

1.4 Analyse