DÉPARTEMENT "INFORMATIQUE"

THÉORIE DE L'INFORMATION

Série d'exercices N^{o}1

PARTIE I. ENTROPIE D'UNE SOURCE. DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS.

Exercice 1 (Calcul d'entropie.)**.** Soit une source d'alphabet $\Omega = \{1, 2, 3, 5, 4\}$. Calculer son entropie pour les distributions de probabilités suivantes.

1. $P_1 = \{0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2\}$
2. $P_2 = \{0.05, 0.05, 0.05, 0.05, 0.8\}$
3. $P_3 = \{0.1, 0.2, 0.3, 0.15, 0.25\}$

Exercice 2.

1. On lance une pièce dont les deux cotés sont identiques : pile. Quelle est l'entropie associée à cette expérience ?
2. On lance un dé équilibré à 6 faces. Quelle est l'information moyenne apportée par l'observation de la parité du résultat ?
3. Un jeu de cartes contient 3 piques, 4 trèfles, 2 cœurs et 1 carreau. On tire une carte au hasard. Quelle est l'entropie de l'observation de la couleur de la carte ?

Exercice 3 (Propriété de groupe.)**.** L'objectif de cet exercice est de vérifier sur un exemple une propriété importante de la fonction d'entropie. Soit X une source d'alphabet $\Omega_X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et de distribution de probabilités $P_X = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Soit $1 \leq r < n$. On divise l'alphabet en deux sois-ensembles $A = \{x_1, \ldots, x_r\}$ et $B = \{x_{r+1}, \ldots, x_n\}$ de telle sorte que $\Omega_X = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset$. Soit $p = P(A)$ et $q = 1 - p = P(B)$. Alors on a la relation suivante :

$$H(X) = H(p_1, \ldots, p_n) = H(p, 1-p) + pH\left(\frac{p_1}{p}, \ldots, \frac{p_r}{p}\right) + (1-p)H\left(\frac{p_{r+1}}{1-p}, \ldots, \frac{p_n}{1-p}\right)$$

On remarquera que $P_A = \left\{\frac{p_1}{p}, \ldots, \frac{p_r}{p}\right\}$ et $Q_B = \left\{\frac{p_{r+1}}{1-p}, \ldots, \frac{p_n}{1-p}\right\}$ définissent des distributions de probabilité respectivement sur A et B.

Soit X une source d'alphabet $\Omega = \{1, 2, 3, 5, 4\}$ de distribution de probabilité $P = \{0.1, 0.2, 0.3, 0.15, 0.25\}$. Soient $A = \{1, 3, 5\}$ et $B = \{2, 4\}$.

1. Calculer l'entropie de X.
2. Calculer $p = P(A)$ et $q = P(B)$. En déduire $H(p, q)$.

3. Définir les distributions de probabilités sur A et sur B comme indiqué ci-dessus et les entropies associées. Vérifier ensuite la propriété de groupe.

Exercice 4 (Vers le codage de Shannon.)**.** Reprenons la même source que dans l'exercice précédent X d'alphabet $\Omega = \{1, 2, 3, 5, 4\}$ de distribution de probabilité $P = \{0.1, 0.2, 0.3, 0.15, 0.25\}$. Supposons que l'on doit deviner le symbole émis par la source et que l'on a droit de poser des questions binaires (réponses possibles "oui" et "non"). On cherche à construire la stratégie qui, en moyenne, permet de trouver la réponse en un nombre minimal de questions.

Remarquons qu'une question binaire induit sur l'ensemble Ω une partition en deux sous-ensembles A et B correspondants aux réponses "oui" et "non". Par exemple, si l'on demande "est que le nombre est pair ?" la partition sera celle de l'exercice précédent. Soit $p = P(A)$ la probabilité de la réponse "oui" à une question donnée.

1. Quelle est l'information moyenne obtenue par la réponse à une question binaire ?
2. Quelle est l'information moyenne maximale ? Et pour quelle valeur de p est est atteinte ?
3. Quel est alors le meilleur choix de première question à poser ?
4. Appliquer le même raisonnement récursivement pour choisir la meilleure deuxième question selon la réponse à la première. Continuer jusqu'à arriver à identifier chaque symbole.
5. Construire un arbre représentant la stratégie obtenue.
6. Calculer le nombre moyen de questions. Comparer à l'entropie de X.