

## DÉPARTEMENT " INFORMATIQUE "

## THÉORIE DE L'INFORMATION

## Série d'exercices N°5 CORRIGÉ.

## PARTIE I. REPRÉSENTATION MATHÉMATIQUE D'UN CANAL DE TRANSMISSION

**Exercice 1 (Exemple).** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires prenant leurs valeurs respectivement dans  $\Omega_X = \{x_1, x_2, x_3\}$  et  $\Omega_Y = \{y_1, y_2\}$  et ayant la matrice de probabilités conjointes suivante

$$P(X, Y) = \begin{array}{c|cc} & y_1 & y_2 \\ \hline x_1 & 0.25 & 0 \\ x_2 & 0.1 & 0.3 \\ x_3 & 0.1 & 0.25 \end{array}$$

En déduire les distributions conditionnelles et marginales.

**Solution de l'exercice 1**

**Distributions marginales de  $X$  et  $Y$ .** On utilise les définitions

$$\forall i = 1, \dots, 3, p(x_i) = \sum_{j=1}^2 p(x_i, y_j), \quad \forall j = 1, \dots, 2, p(y_j) = \sum_{i=1}^3 p(x_i, y_j)$$

On peut résumer ces calculs sous forme d'un tableau

	$y_1$	$y_2$	$P_X$
$x_1$	0.25	0	0.25
$x_2$	0.1	0.3	0.4
$x_3$	0.1	0.25	0.35
$P_Y$	0.45	0.55	

La dernière colonne de ce tableau représente la distribution marginale de  $X$  et s'obtient en calculant les sommes des éléments de chaque ligne.

La dernière ligne du tableau représente la distribution marginale de  $Y$  et s'obtient en calculant les sommes des éléments de chaque colonne.

**Distributions conditionnelles**  $P(X|Y)$  et  $P(Y|X)$ . On utilise la définition

$$\forall i = 1, \dots, 3, \forall j = 1, \dots, 2, p(x_i|y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}, \quad p(y_j|x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}$$

On trouve les matrices

$$P(X|Y) = \begin{pmatrix} 5/9 & 0 \\ 2/9 & 6/11 \\ 2/9 & 5/11 \end{pmatrix}, \quad P(Y|X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/4 & 3/4 \\ 2/7 & 5/7 \end{pmatrix}$$

**Exercice 2** (Un modèle probabiliste de transmission). Soit une source binaire qui émet des signaux binaires, composés de 0 et de 1. On associe à l'expérience d'envoi d'un seul symbole une variable aléatoire  $X$  qui prend donc des valeurs dans  $\Omega_X = \{0, 1\}$ . On suppose que la source émet 0 ou 1 avec équiprobabilité. Autrement dit, la distribution de  $X$  est connue :

$$p_X(0) = p_X(1) = 0.5$$

Les symboles émis sont ensuite envoyés via un canal de transmission ayant des perturbations aléatoires. On associe à l'expérience d'observation du symbole reçu la variable aléatoire  $Y$  qui peut prendre trois valeurs :  $\Omega_Y = \{-1, 0, 1\}$ . La valeur  $-1$  correspond au cas où le système n'est pas capable d'identifier un 0 ou un 1 à la sortie. On a établi les probabilités de réception suivantes :

– Si le symbole envoyé  $X$  est 0 alors on reçoit :

1.  $Y = 1$  avec la probabilité 0.2
2.  $Y = 0$  avec la probabilité 0.7
3.  $Y = -1$  avec la probabilité 0.1

– Si le symbole envoyé  $X$  est 1 alors on reçoit :

1.  $Y = 1$  avec la probabilité 0.6
2.  $Y = 0$  avec la probabilité 0.3
3.  $Y = -1$  avec la probabilité 0.1

1. Dire si les probabilités de réception données ci-dessus définissent la distribution conjointe ou conditionnelle de  $X$  et  $Y$  ? Si conditionnelle, préciser de quelle variable ?
2. Pouvez-vous donner une représentation sous forme de graphe des probabilités de réception ?
3. Former une matrice à partir des probabilités de réception.
4. Calculer toutes les distributions manquantes.
5. Calculer les entropies associées au canal :

$$H(X), H(Y), H(X, Y), H(X|Y), H(Y|X)$$

6. En déduire l'information mutuelle  $I(X, Y)$  du canal.

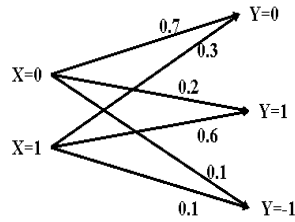


FIGURE 1 – Représentation graphique de la distribution conditionnelle.

### Solution de l'exercice 2

1. Il s'agit des probabilités conditionnelles  $Y|X$ .
2. Représentation sous forme de graphe des probabilités de réception.
3. La matrice de la distribution conditionnelle  $P(Y|X)$  :

$$P(Y|X) = \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 1 & 0.3 & 0.6 & 0.1 \end{array}$$

4. **Distribution conjointe de  $X$  et  $Y$   $P(X, Y)$ .** On utilise la définition

$$\forall i = 1, \dots, 3, \forall j = 1, \dots, 2, p(x_i, y_j) = p(y_j|x_i)p(x_i)$$

On trouve la matrice

$$P(X, Y) = \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0.35 & 0.1 & 0.05 \\ 1 & 0.15 & 0.3 & 0.05 \end{array}$$

- Distribution marginale de  $Y$ .** On utilise la définition

$$\forall j = 1, \dots, 2, p(y_j) = \sum_{i=1}^3 p(x_i, y_j)$$

Ainsi, en faisant les sommes des éléments de chaque **colonne** de la matrice  $P(X, Y)$  on trouve :

$$p_Y(0) = 0.35 + 0.15 = 0.5 \quad p_Y(1) = 0.1 + 0.3 = 0.4 \quad p_Y(-1) = 0.05 + 0.05 = 0.1$$

- Distribution conditionnelle  $P(X|Y)$ .** On utilise la définition

$$\forall i = 1, \dots, 3, \forall j = 1, \dots, 2, p(x_i|y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}$$

On trouve la matrice

$$P(X|Y) = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.25 & 0.5 \\ 0.3 & 0.75 & 0.5 \end{pmatrix}$$

5. Calculer les entropies associées au canal :

$$H(X), H(Y), H(X, Y), H(X|Y), H(Y|X)$$

Comme  $X$  est une source binaire de distribution uniforme on a

$$H(X) = \log_2(2) = 1$$

Pour  $H(Y)$  on utilise la distribution marginale  $P_Y$  :

$$H(Y) = -0.5 \log_2(0.5) - 0.4 \log_2(0.4) - 0.1 \log_2(0.1) \simeq 1.36$$

Pour  $H(X, Y)$  on utilise la distribution conjointe  $P(X, Y)$  :

$$H(X, Y) = - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 p(x_i, y_j) \log_2(x_i, y_j) \simeq 2.22$$

Pour  $H(X|Y)$  on utilise la distribution conjointe  $P(X, Y)$  et la distribution conditionnelle  $P(X|Y)$  :

$$H(X|Y) = - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 p(x_i, y_j) \log_2(x_i|y_j) \simeq 0.86$$

Pour  $H(Y|X)$  on utilise la distribution conjointe  $P(X, Y)$  et la distribution conditionnelle  $P(Y|X)$  :

$$H(Y|X) = - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 p(x_i, y_j) \log_2(y_j|x_i) \simeq 1.22$$

6. En déduire l'information mutuelle  $I(X, Y)$  du canal.

$$I(X; Y) = H(X) - H(X|Y) = 1 - 0.86 = 0.14$$

**Exercice 3.** Soit une source binaire  $X$  d'alphabet  $\Omega_X = \{0, 1\}$ . On suppose que la distribution de probabilité de  $X$  est connue :

$$p_X(0) = p, \quad p_X(1) = 1 - p$$

Les symboles émis sont envoyés via un canal de transmission ayant des perturbations aléatoires. On associe à l'expérience d'observation du symbole reçu la variable aléatoire  $Y$  qui peut prendre trois valeurs :  $\Omega_Y = \{-1, 0, 1\}$ . La valeur  $-1$  correspond au cas où le système n'est pas capable d'identifier un 0 ou un 1 à la sortie. On suppose que la matrice de transition du canal est la suivante :

$$P(Y|X) = \begin{array}{c|ccc} X \backslash Y & 0 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 0.8 & 0.2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0.2 & 0.8 \end{array}$$

### Solution de l'exercice 3

1. Est ce que c'est un canal symétrique ? Justifier. **Réponse.** Non, ce canal ne correspond pas à la définition d'un canal symétrique. Certes, les lignes de la matrice de transition sont toutes équivalentes par permutation, mais pas les colonnes.
2. En utilisant la matrice de transition  $P(Y|X)$  et la distribution de probabilité de  $X$ ,  $P_X$ , calculer la distribution de probabilité conjointe  $P(X, Y)$ . En déduire  $P_Y$ , la distribution marginale du récepteur,  $Y$  et la distribution conditionnelle  $P(X|Y)$ .

**Réponse.**

$$P(X, Y) = \begin{array}{c|cccc} & P_Y & 0.8p & 0.2 & 0.8(1-p) \\ \hline P_X & X \setminus Y & 0 & -1 & 1 \\ \hline p & 0 & 0.8p & 0.2p & 0 \\ \hline 1-p & 1 & 0 & 0.2(1-p) & 0.8(1-p) \end{array}$$

$$P(X|Y) = \begin{array}{c|cccc} & P_Y & 0.8p & 0.2 & 0.8(1-p) \\ \hline P_X & X \setminus Y & 0 & -1 & 1 \\ \hline p & 0 & 1 & p & 0 \\ \hline 1-p & 0 & 0 & (1-p) & 1 \end{array}$$

3. Exprimer l'entropie  $H_X(p)$  comme fonction du paramètre  $p$ .

**Réponse.**

$$H_X(p) = -p \log_2(p) - (1-p) \log_2(1-p)$$

4. Calculer  $H(X|Y)$  en fonction du paramètre  $p$ . **Réponse.**

$$\begin{aligned} H(X|Y) &= - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 p(x_i, y_j) \log_2(x_i|y_j) = \\ &= -0.8p \log_2(1) - 0.2p \log_2(p) - 0.2(1-p) \log_2(1-p) - 0.8(1-p) \log_2(1) = \\ &= 0.2(-p \log_2(p) - (1-p) \log_2(1-p)) = 0.2H_X(p) \end{aligned}$$

5. Calculer  $I(X; Y) = H_X(p) - H(X|Y)$ . Montrer que  $I(X; Y) = 0.8H_X(p)$ .

**Réponse.**

$$I(X; Y) = H_X(p) - H(X|Y) = H_X(p) - 0.2H_X(p) = 0.8H_X(p)$$

6. En déduire la valeur de la capacité du canal définie par

$$C = \max_{P_X} I(X; Y)$$

où le maximum est pris selon toutes les distributions possibles de la source  $X$ .

**Réponse.** D'après la question précédente on a

$$C = \max_{P_X} I(X; Y) = \max_{p \in [0,1]} 0.8H_X(p)$$

car la distribution d'une source binaire est complètement définie par la donnée de  $p$ . Or, l'entropie d'une source binaire,  $H_X(p)$  atteint son maximum pour  $p = 0.5$  :

$$C = 0.8 \max_{p \in [0,1]} H_X(p) = 0.8 H_X(0.5) = 0.8$$

---

### PARTIE III. POUR APPROFONDIR

---

**Exercice 4.** Soit l'algorithme suivant.

**Entrée :**  $x_0 \in \{1, 2, 3, 4\}$  tiré aléatoirement avec équiprobabilité.

**Algorithme :**  $n \leftarrow 0$

**TANT QUE** ( $x_n \neq 1$ )

$A_n \leftarrow \begin{cases} 0, & \text{avec probabilité } p_n = 1/x_n \\ 1, & \text{avec probabilité } q_n = 1 - 1/x_n \end{cases}$

**SI** ( $x_n$  est pair)

**ALORS**  $x_{n+1} \leftarrow \frac{x_n}{2}$

**SINON**  $x_{n+1} \leftarrow A_n x_n + 1$

**FIN SI**

$n \leftarrow n + 1$

**FIN TANT QUE**

**Sortie :** Nombre d'itérations  $n$ .

Soient  $X$ , la variable aléatoire correspondante à l'entrée de l'algorithme, uniformément distribuée sur  $\{1, 2, 3, 4, \}$  et  $N$  la variable aléatoire correspondante à la sortie de l'algorithme.

**L'objectif de l'exercice** est de calculer le nombre moyen d'itérations effectuées par cet algorithme. Autrement dit, calculer  $E[N]$ .

---

#### Solution de l'exercice 4

1. Établir la matrice de probabilités conditionnelles  $P(N|X)$ , en utilisant les schémas sous forme d'arbre pour le déroulement de l'algorithme pour chaque valeur de  $X$ .
  - (a) Si  $x_0 = 1$  alors la boucle l'algorithme s'arrête tout de suite, sans exécuter la boucle *while*. On a alors  $N = 0$  avec la probabilité 1.

- (b) Si  $x_0 = 2$ . C'est un nombre pair. Alors, quelle que soit la valeur de  $A_0$ , on a  $x_1 = \frac{x_0}{2} = 1$ ,  $n = 1$  et l'algorithme s'arrête. Ainsi, si  $x_0 = 2$  la variable  $N$  prend la valeur 1 avec la probabilité 1.
- (c) Le cas  $x_0 = 3$  est traité dans l'exemple ci-dessus. On déduit du graphe que si  $x_0 = 3$  alors  $N = 1$  avec la probabilité  $\frac{1}{3}$  et  $N = 3$  avec la probabilité  $\frac{2}{3}$ ;
- (d) Si  $x_0 = 4$  alors l'algorithme effectue deux divisions par 2 indépendamment des valeurs aléatoires  $A$ . Il s'arrête avec  $N = 2$ .

On obtient ainsi la matrice suivante des probabilités conditionnelles

$$P(N|X) = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

2. Sachant que  $X$  est uniformément distribué, déduire la matrice de probabilités conjointes de  $N$  et  $X$ . Comme dans les exercices précédents, on peut maintenant déduire la matrice de probabilités conjointes en utilisant le fait que la variable  $X$  est distribuée uniformément :

$$p_X(1) = p_X(2) = p_X(3) = p_X(4) = \frac{1}{4}$$

Pour la matrice de probabilités conjointes on utilise la formule

$$\forall i = 1, \dots, 4, \forall n = 0, \dots, 3, p(x_i, n) = p(n|x_i)p_X(x_i)$$

On trouve la matrice

$$P(X, N) = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1/12 & 0 & 1/6 \\ 4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \end{array}$$

3. Calculer la distribution de probabilités marginale de  $N$ . Pour calculer la distribution marginale de  $N$  il suffit de faire la somme des éléments de chaque colonne. On obtient :

$$P_N = \begin{array}{c|cccc} n & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline P_N(n) & 1/4 & 1/3 & 1/4 & 1/6 \end{array}$$

4. En déduire le nombre moyen d'itérations.

$$E[N] = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{3}$$


---