ALGEBRE 2014

I

i) $P_A(t) = (t^2-8t+16)^3(t^2+2\sqrt{2}t+2)^2$

$= [(t-4)^2]^3[(t+\sqrt{2})^2]^2$

$= (t-4)^6(t+\sqrt{2})^4$

$m_A(t) = (t^2-8t+16)^2(t^2+2\sqrt{2}+2)^2$

$= (t-4)^4(t+\sqrt{2})^4$

On a donc les formes canoniques de Jordan suivantes :

$$\begin{pmatrix}
4 & 1 & & & & & & & & \\
 & 4 & 1 & & & & & & & \\
 & & 4 & 1 & & & & & & \\
 & & & 4 & 0 & & & & & \\
 & & & & 4 & a & & & & \\
 & & & & & 4 & 0 & & & \\
 & & & & & & -\sqrt{2} & 1 & & \\
 & & & & & & & -\sqrt{2} & 1 & \\
 & & & & & & & & -\sqrt{2} & 1 \\
 & & & & & & & & & -\sqrt{2}
\end{pmatrix}$$

avec $a = 0$

ou $a = 1$.

ii)

ALGEBRE 2014 (2)

II

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1-i \\ i & 1 & 0 \\ 1+i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) a) $H^* = {}^t\overline{H} = {}^t\begin{pmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1-i \\ i & 1 & 0 \\ 1+i & 0 & 1 \end{pmatrix} = H$

donc H est hermitienne.

Ensuite, soit ϕ une forme quadratique hermitienne qui admet H comme représentation matricielle.

$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$,

$$\phi(X) = {}^tX H \overline{X} = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & -i & 1-i \\ i & 1 & 0 \\ 1+i & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \overline{x_3} \end{pmatrix}$$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} \overline{x_1} - i\overline{x_2} + (1-i)\overline{x_3} \\ i\overline{x_1} + \overline{x_2} \\ (1+i)\overline{x_1} + \overline{x_3} \end{pmatrix}$$

$$= x_1\left(\overline{x_1} - i\overline{x_2} + (1-i)\overline{x_3}\right) + x_2\left(i\overline{x_1} + \overline{x_2}\right) + x_3\left((1+i)\overline{x_1} + \overline{x_3}\right)$$

$$= x_1\overline{x_1} - i x_1\overline{x_2} + x_1\overline{x_3} - i x_1\overline{x_3} + i x_2\overline{x_1} + x_2\overline{x_2} + x_3\overline{x_1} + i x_3\overline{x_1} + x_3\overline{x_3}$$

$$= |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + x_1\overline{x_3} + \overline{x_1}x_3 + i\left(-x_1\overline{x_2} - x_1\overline{x_3} + x_2\overline{x_1} + x_3\overline{x_1}\right)$$

b)

c) Calculons le polynome caractéristique de H.

$$P_H(\lambda) = |H-\lambda I_d| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -i & 1-i \\ i & 1-\lambda & 0 \\ 1+i & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \dots \quad \begin{matrix} C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ C_2 \leftarrow C_2 + iC_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 - iL_2 \end{matrix} \quad \dots = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1+2i & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

(on développe selon la première ligne)

$$= (1-\lambda)(1-\lambda)^2 - 3(1-\lambda)$$

$$= (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 3\right]$$

$$= (1-\lambda)(1-\lambda-\sqrt{3})(1-\lambda+\sqrt{3})$$

$$= (1-\lambda)(1-\sqrt{3}-\lambda)(1+\sqrt{3}-\lambda)$$

$$\Rightarrow Sp(H) = \{1, 1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\}$$

On voit que P_H est scindé et ne possède que des racines simples, donc H est diagonalisable

(ii) a) Le théorème de Gerschgorin - Hadamard nous dis que les valeurs propres d'une matrice peuvent être localisées dans l'union des disques de Hadamard.

On a donc $\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ sp(H) \subset \bigcup_{i \in [\![1,n]\!]} D_i$

avec $D_i = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - h_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |h_{ij}| \right\}$

__Preuve__ : Soit λ une valeur propre de H, et v un vecteur propre associé. On a $(H - \lambda I_d)v = 0$

On considère la plus grande composante de v en module (v_ℓ) donc $v_\ell \neq 0$

ainsi on peut écrire $(\lambda - h_{\ell\ell})v_\ell = \sum_{i \neq \ell} h_{\ell i} v_i$

en passant au module : $|\lambda - h_{\ell\ell}|\,|v_\ell| \leq \sum_{i \neq \ell} |h_{\ell i}||v_i| \leq |v_\ell| \sum_{i \neq \ell} |h_{\ell i}|$

$\Rightarrow |\lambda - h_{\ell\ell}| \leq \sum_{i \neq \ell} |h_{\ell i}| \iff \lambda \in D_\ell$ QED.

b) On peut applique le théorème sur notre matrice H

$D_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| \leq 1 + \sqrt{2} \right\}$

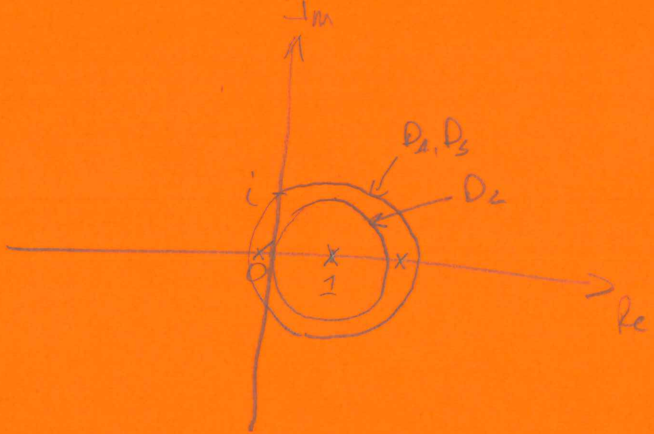
$D_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| \leq 1 \right\}$

$D_3 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| \leq 1 + \sqrt{2} \right\} = D_1$

ALGEBRE 2014 (4)

On notera ici que $D_1 \cup D_2 \cup D_3 = D_1$

d'où le schéma suivant



x : valeurs propres de H

On voit bien ici que $sp(H) \subset \bigcup_{i \in [\![1,3]\!]} D_i$

(iii) a) On sait que P est hermitien, donc $H^\# = H$

et $H^\# H = H H^\# \Rightarrow$ P est normal.

Comme vu au point précédent, les valeurs propres de P sont les valeurs propres de H, qui sont donc 1, $1-\sqrt{3}$, et $1+\sqrt{3}$.

b) $\rho(H) = 1+\sqrt{3}$ (plus grande valeur propre en module)

c) Selon le théorème du cours, puisque H est normale, on a

$$\|H\|_2 = \rho(H) = 1+\sqrt{3}$$

d) U et V unitaires ($\Leftrightarrow U^* = U^{-1}$ et $V^* = U^{-1}$), $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

donc $\|U^* H V\|_2^2 = \langle U^* HV, U^* HV \rangle$

$$= \langle HV, (U^*)^* U^* HV \rangle = \langle HV, HV \rangle$$

par le même procédé on arrive à $\langle HV, HV \rangle = \langle H, H \rangle = \|H\|_2^2$

$\Rightarrow \|U^* HV\|_2 = \|H\|_2$ QED

(III) ALGEBRE 2014 (5)

a) On peut définir, pour tout $P, Q \in E$, le produit scalaire suivant :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$$

qui est bien à l'origine de la norme : $\sqrt{\langle P, P\rangle} = \sqrt{\int_0^1 P^2(t)\,dt} = \|P\|$.

b) Tout d'abord, B n'est pas liée (c'est déjà ça), ensuite on a :

$$\langle 1-6t^2, Q(t)\rangle = \int_0^1 (1-6t^2)(t-1)\,dt = \int_0^1 (-6t^3+6t^2+t-1)\,dt = \left[-\frac{6}{4}t^4 + \frac{6}{3}t^3 + \frac{t^2}{2} - t\right]_0^1$$

$$= -\frac{6}{4} + \frac{6}{3} + \frac{1}{2} - 1 = 0$$

$$\langle t-2t^2, Q(t)\rangle = \int_0^1 (t-2t^2)(t-1)\,dt = \int_0^1 (-2t^3+3t^2-t)\,dt = \left[-\frac{2}{4}t^4 + \frac{3}{3}t^3 - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2} = 0$$

donc on a $B = \{b_1, b_2\}$, $b_1 \perp Q$, $b_2 \perp Q$, ainsi B génère bien F, orthogonal à Q.

Soit $B' = \{b_1', b_2'\}$ une base orthonormale pour F, alors par Gram-Schmidt :

$b_1' = b_1$

$b_2' =$ $\longrightarrow$ calculs chiants $\Longrightarrow$ victory.