

Analyse II (MM).

Cours de révisions

le 16-03-09

1

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs

MATHEMATIQUES POUR L'INGENIEUR

CORRECTIONS

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx$$

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx$$

Donc

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Re} I_1 \quad \text{ou} \quad I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx$$

$$I_1 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx$$

1 On définit

a)

$$I_{C_R} = \oint_{C_R} \frac{e^{iz}}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)} dz = \int_{-R}^R \frac{e^{iz}}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)} dz + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)} dz$$

Pour fermer le contour, on choisit le demi-cercle supérieur Γ_{R^+} car

$$|e^{iz}| = |e^{i(\operatorname{Re}z + i\operatorname{Im}z)}| = |e^{i\operatorname{Re}z}| \cdot |e^{-\operatorname{Im}z}| = |e^{-\operatorname{Im}z}| = e^{-R \sin \theta} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

$$(\Leftrightarrow -\operatorname{Im}z > 0) \quad z = Re^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

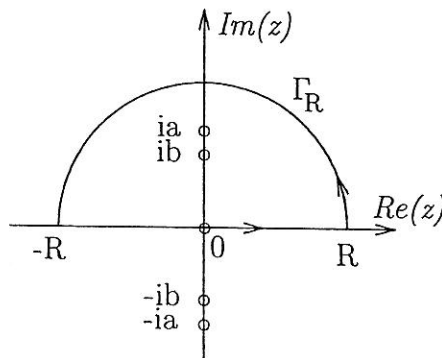


FIG. 1 -

L'exponentielle $e^{-R \sin \theta}$ assure la décroissance de l'intégrale sur Γ_R quand $R \rightarrow \infty$.

b) On place les pôles sur le plan complexe de Z et on calcule les résidus des pôles se trouvant à l'intérieur du contour.

$$\frac{e^{iz}}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)} = \frac{e^{iz}}{(z + ia)(z - ia)(z + ib)(z - ib)}$$

$$\text{Res} \frac{e^{iz}}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)} \Big|_{z=ia} = \lim_{z \rightarrow ia} \frac{e^{iz}}{(z + ia)(z - ia)(z^2 + b^2)} \cdot (z - ia) = \frac{e^{-a}}{2ia(b^2 - a^2)}$$

$$\text{Res} \frac{e^{iz}}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)} \Big|_{z=ib} = \lim_{z \rightarrow ib} \frac{e^{iz}}{(z + ia)(z - ia)(z^2 + b^2)} \cdot (z - ib) = \frac{e^{-b}}{2ib(a^2 - b^2)}$$

2 On applique le th. des résidus et on prend la limite $R \rightarrow \infty$ de chaque membre

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R \frac{e^{iz} dz}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)} + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz} dz}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)} &= 2\pi i \sum_{\text{résidus à l'intér. du } C_R^+} \text{Res} \left(\frac{e^{iz}}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)} \right) \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \underbrace{\int_{-R}^R \frac{e^{iz} dz}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)}}_{=I_1} + \lim_{R \rightarrow \infty} \underbrace{\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz} dz}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)}}_{=0} &= 2\pi i \underbrace{\sum \text{Res} \left(\frac{e^{iz} dz}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)} \right)}_{\text{résidus en pôles de demi-plan sup.}} \end{aligned}$$

3 On vérifie les conditions du Lemme de Jordan

$$\left| \frac{e^{iz}}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)} \right| \underset{R \rightarrow \infty}{\leq} \frac{Me^{-R \sin \theta}}{R^4}, \quad \text{ici } = 4 > 0$$

On en conclut que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R^+} \frac{e^{iz}}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)} = 0$$

4

$$I_1 = 2\pi i \sum_{\substack{z_1=ia \\ z_2=ib}} \text{Res} \left(\frac{e^{iz}}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)} \right) = \frac{\pi}{a^2 - b^2} \left(\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a} \right)$$

On revient à

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Re} I_1 = \frac{\pi}{2(a^2 - b^2)} \left(\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a} \right)$$

Exercice 2

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx$$

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx$$

Donc $I = \frac{1}{2} \operatorname{Im} I_2$ ou $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx$

$$I_2 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x e^{ix}}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx$$

On répète les étapes 1, 2, 3, 4 pour la fonction $\frac{z e^{iz}}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)}$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \frac{z e^{iz}}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)} \Big|_{z=ia} &= \lim_{z \rightarrow ia} \frac{z e^{iz}(z - ia)}{(z + ia)(z - ia)(z^2 + b^2)} = \frac{ia e^{-a}}{2ia(b^2 - a^2)} \\ &= \frac{e^{-a}}{2(b^2 - a^2)} \end{aligned}$$

$$\operatorname{Res} \frac{z e^{iz}}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)} \Big|_{z=ib} = \frac{e^{-b}}{2(a^2 - b^2)}$$

$$I_2 = 2\pi i \sum_{\substack{z_1=ia \\ z_2=ib}} \operatorname{Res} \left(\frac{z e^{iz}}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)} \right) = \frac{\pi i}{a^2 - b^2} (e^{-b} - e^{-a})$$

On revient à $I = \frac{1}{2} \operatorname{Im} I_2 = \frac{\pi}{2(a^2 - b^2)} (e^{-b} - e^{-a})$

Remarque Il faut absolument remplacer $\cos x$ par $\operatorname{Re}(e^{ix})$ et $\sin x$ par $\operatorname{Im}(e^{ix})$ car les fonctions complexes $\cos z$ et $\sin z$ ne sont pas bornées et ne vérifient pas les conditions du Lemme de Jordan sur γ_R .

$$\text{Calculons } \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(p-4)(p^2-4p+13)} \right\} = f(t)$$

$$\mathcal{L}(p) = \frac{1}{(p-4)(p^2-4p+13)}$$

$$\boxed{f(t)} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(p-4)(p^2-4p+13)} \right\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi_0-i\infty}^{\xi_0+i\infty} e^{pt} L(p) dp$$

1 On définit I_{CRB} et le contour de Bromwich

a)

$$I_{CRB} = \oint_{CRB} e^{pt} L(p) dp = \int_{\xi_0-i\eta}^{\xi_0+i\eta} e^{pt} L(p) dp + \int_{\gamma_R} e^{pt} L(p) dp$$

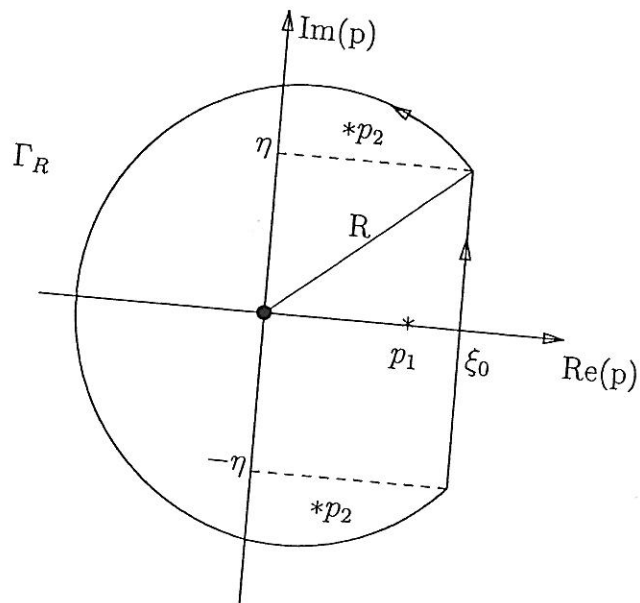


FIG. 2 -

On choisit ξ_0 de telle façon que tous les pôles soient à gauche de la droite $p = \xi_0$

b) On place les pôles sur le plan complexe de P et on calcule les résidus

$$\frac{1}{(p-4)(p^2-4p+13)} = \frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)}, \quad \begin{aligned} p_1 &= 4 \\ p_2 &= 2-3i \\ p_3 &= 2+3i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left(\frac{e^{pt}}{(p-p_1)(p^2-4p+13)} \right) \Big|_{p=p_1} &= \frac{e^{p_1 t}}{(p^2-4p+13)} = \frac{e^{4t}}{13} \\ \operatorname{Res} \left(\frac{e^{pt}}{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)} \right) \Big|_{p=p_2} &= \lim_{r \rightarrow p_2} \frac{(p-p_2)e^{pt}}{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)} \\ &= \frac{e^{p_2 t}}{(p_2-p_1)(p_2-p_3)} \\ \operatorname{Res} \left(\frac{e^{pt}}{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)} \right) \Big|_{p=p_3} &= \frac{e^{p_3 t}}{(p_3-p_1)(p_3-p_2)} \end{aligned}$$

2 On applique le Th. des résidus et on prend la limite $R \rightarrow \infty$ de chaque membre

$$\int_{\xi_0 - i\eta}^{\xi_0 + i\eta} e^{pt} L(p) dp + \int_{C_R} e^{pt} L(p) dp = 2\pi i \sum_{\substack{\text{résidus à l'int.} \\ \text{du } C_{RB}}} \operatorname{Res}(e^{pt} L(p))$$

$$\underbrace{\frac{1}{\pi i} \int_{\xi_0 - i\eta}^{\xi_0 + i\eta} e^{pt} L(p) dp}_{f(t)} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} e^{pt} L(p) dp}_0 = \lim_{R \rightarrow \infty} \underbrace{\sum \operatorname{Res}(e^{pt} L(p))}_{\substack{\text{résidus à gauche} \\ \text{de la droite } p=\xi_0 \\ \text{à celui}}}$$

3 On vérifie les conditions du lemme analogue du Lemme de Jordan

$$\left| \frac{e^{pt}}{(p-4)(p^2-4p+13)} \right| \leq \frac{|e^{(\operatorname{Re} p)t}|}{R^3} \lesssim \frac{e^{-|\xi|t}}{R^3}, \quad R \rightarrow \infty, \quad \xi \rightarrow -\infty$$

On en déduit $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} e^{pt} L(p) dp = 0$

4

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{p_1 p_2 p_3} \operatorname{Res}(e^{pt} L(p)) = \\ &= \frac{e^{4t}}{13} + \frac{e^{p_2 t}}{(p_2-p_1)(p_2-p_3)} + \frac{e^{p_3 t}}{(p_3-p_1)(p_3-p_2)} = \\ &= \frac{e^{4t}}{13} + \frac{e^{(2-3i)t}}{(-2-3i)(-6i)} + \frac{e^{(2+3i)t}}{(-2+3i)(6i)} = \\ &= \frac{e^{4t}}{13} + \frac{e^{2t}}{13} \left(\frac{2}{3} \sin 3t + \cos 3t \right) \end{aligned}$$