EISTI - DÉPARTEMENT INFORMATIQUE

EXAMEN D'ANALYSE NUMÉRIQUE

9 juin 2008 – **DURÉE 3h00**

La consultation des documents et l'usage des calculettes et des portables sont interdits. Seules sont autorisées trois feuilles format A4 manuscrites recto-verso

Pour la notation il sera tenu compte de la clarté de l'exposé, de la rigueur du raisonnement et du soin apporté à la copie.

1 Calcul des erreurs

Soit la matrice A, les vecteurs b et $b + \delta b$ suivants avec $\varepsilon > 0$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+\varepsilon \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} + \delta\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\varepsilon \end{pmatrix}$$

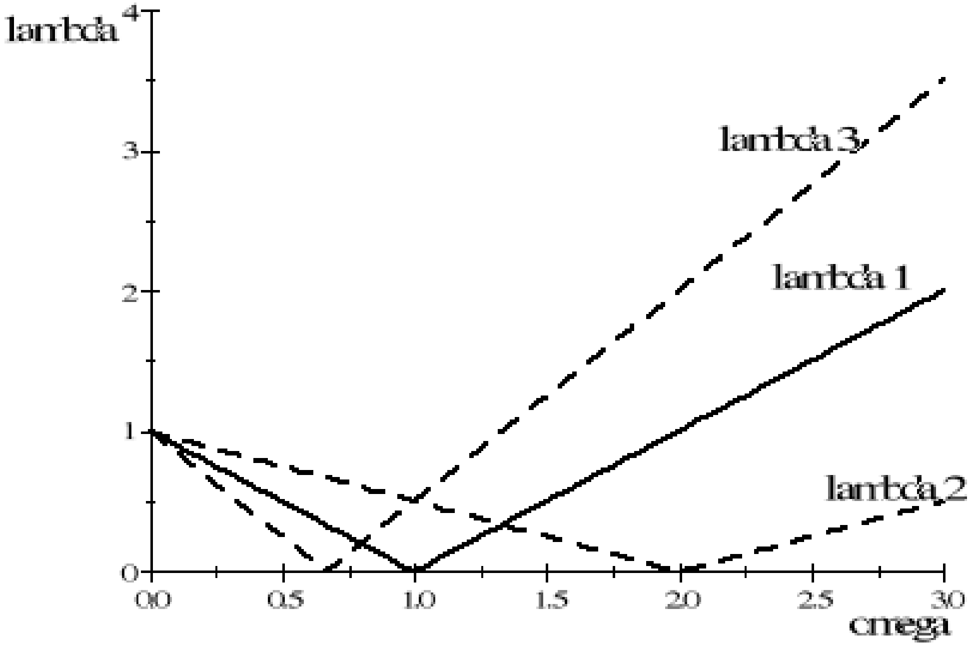
1. Résoudre les systèmes $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ et $\mathbf{Ax}_\varepsilon = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$
2. Que vaut l'erreur relative sur la solution $\mathbf{x}$ en norme 1 en fonction de ε ?
3. Que vaut l'erreur relative sur le second membre $\mathbf{b}$ en norme 1 en fonction de ε ?
4. En déduire une minoration du conditionnement de $\mathbf{A}$ en fonction de ε.
5. Calculer le conditionnement de $\mathbf{A}$ en norme 1.
6. Est-ce cohérent avec l'estimation trouvée à la question 4 ?

2 Algèbre linéaire

On considère le système linéaire $Ax = b$ où

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. On veut résoudre le systèmepar la méthode de Jacobi.
   (a) Donner la formulation itérative de la méthode de Jacobi sous la forme
   $$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{J}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{G}\mathbf{b}$$
   en précisant les matrices $\mathbf{J}$ et $\mathbf{G}$.
   (b) Établir si la méthode est convergente.
2. On perturbe le système en $\mathbf{A}_\varepsilon\mathbf{x} = \mathbf{b}_\varepsilon$où
   $$\mathbf{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2+\varepsilon & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{b}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Montrer que la solution de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ est la même que celle de $\mathbf{A}_\varepsilon\mathbf{x} = \mathbf{b}_\varepsilon$.
   (b) On suppose que $\varepsilon > 0$. Montrer sans calcul que la méthode de Jacobi est convergente.



(c) On suppose que $\varepsilon < 0$. Déterminer la valeur ε_0 telle que la méthode de Jacobi converge pour tout $\varepsilon \in]\varepsilon_0, 0[$.

(On indique que les valeurs propres de la matrice $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ \frac{1}{2+\varepsilon} & 0 & \frac{1}{2+\varepsilon} \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ sont $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2+\varepsilon}}$ et $\lambda_3 = -\frac{1}{\sqrt{2+\varepsilon}}$.)

3. On veut résoudre le système par la méthode de Jacobi relaxé.

(a) Donner la formulation itérative de la méthode de Jacobi relaxé sous la forme

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{J}_\omega \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{G}_\omega \mathbf{b}$$

en précisant les matrices $\mathbf{J}_\omega$ et $\mathbf{G}_\omega$.

(b) Quelle est la condition nécessaire sur ω pour que la méthode converge ?

(c) Les valeurs propres de la matrice $\mathbf{J}_\omega$ sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 - \omega \\ \lambda_2 = 1 - \frac{\omega}{2} \\ \lambda_3 = 1 - \frac{3\omega}{2} \end{cases}$$

En utilisant le graphique ci-dessous déterminer la condition suffisante sur ω assurant la convergence.

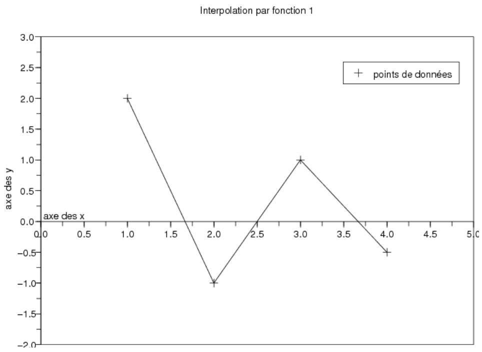
Pour quelles valeurs de ω la convergence est-elle la plus rapide ?

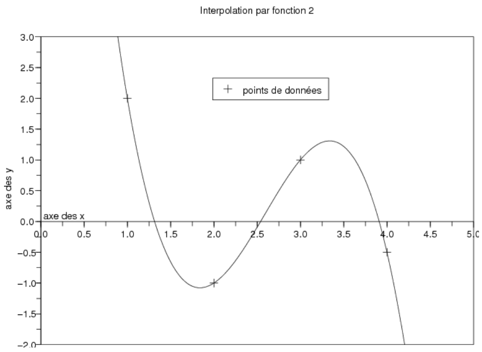
3 Interpolation

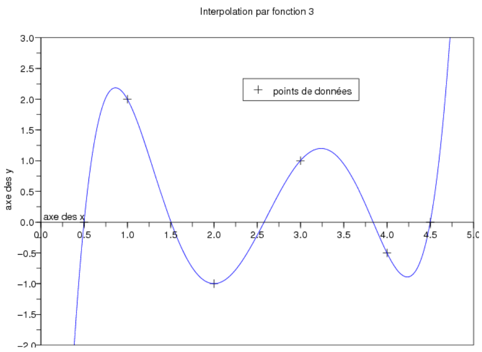
On s'intéresse à l'approximation par interpolation de Lagrange de la fonction donnée par les points $(x_i, y_i)_{i=1,\ldots 4}$ suivants :

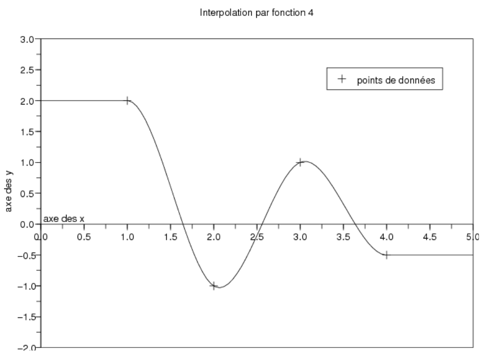
x_i	1	2	3	4
y_i	2	-1	1	-0.5

1. Parmi les quatre fonctions utilisées pour réaliser l'interpolation, et représentées sur les graphiques ci-dessous, laquelle est une fonction d'interpolation de Lagrange ? (Justifiez soigneusement votre réponse).









2. Donner l'expression du polynôme d'interpolation de Lagrange $p_4(x)$ relatif aux points ci-dessus.
3. La fonction exacte étant de la forme

$$f(x) = a \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + bx + ce^x + d$$

montrer que l'erreur d'interpolation $E_f(x)$ au point $x = 0$ est majorée par

$$|E_f(0)| \leq |a| \frac{\pi^4}{16} + |c| \, e^4$$

4 Intégration

On s'intéresse à l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

de la fonction f définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

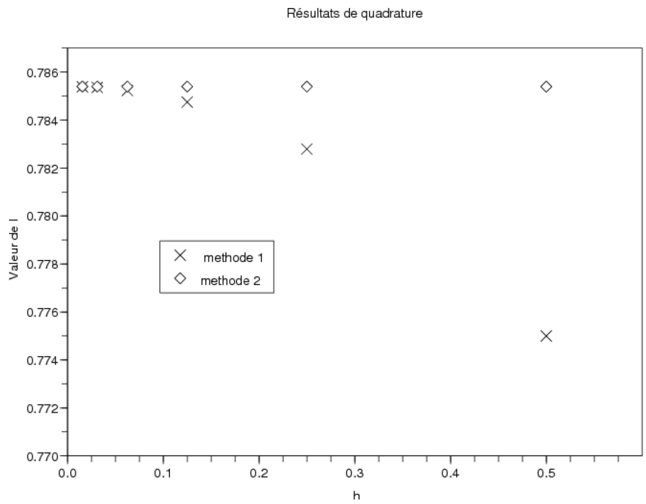
1. Montrer que la valeur exacte de I est $\frac{\pi}{4}$.
2. On réalise le calcul approché de cette intégrale en choisissant deux points :

$$\begin{aligned} a &= x_0 = 0 \\ b &= x_1 = 1 \end{aligned}$$

   (a) Déterminer la valeur approchée obtenue par la méthode des trapèzes
   (b) Déterminer la valeur approchée obtenue par la méthode de Simpson
3. On choisit maintenant trois points :

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_1 &= 0.5 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$$

   (a) Déterminer la valeur approchée obtenue par la méthode des trapèzes
   (b) Indiquer la formule permettant d'obtenir le résultat par la méthode de Simpson (on ne demande pas d'évaluer le résultat)
4. On a programmé ces deux méthodes pour plusieurs valeurs du pas h et les résultats ont été reportés sur le graphique ci-dessous.



(a) Entourez les points du graphique qui fournissent la valeur approchée la plus fiable et donnez cette valeur.

(b) Parmi les deux méthodes dont les résultats sont représentés, laquelle est celle des trapèzes, laquelle est celle de Simpson (justifier votre réponse)

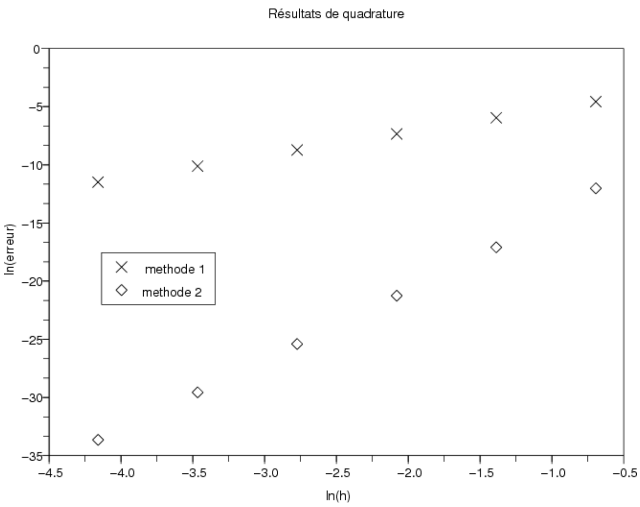
5. Avec chaque méthode on obtient une valeur approchée de I que l'on note $\hat{I}$ ($\hat{I}_S$ pour l'intégration numérique par la méthode de Simpson et $\hat{I}_T$ pour l'intégration numérique par la méthode des trapèzes). On introduit l'erreur de chaque méthode :

$$\begin{aligned} e_S &= \left|I - \hat{I}_S\right| \\ e_T &= \left|I - \hat{I}_T\right| \end{aligned}$$

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les quantités

$$\ln(e_S) = \ln\left(\left|\frac{\pi}{4} - \hat{I}_S\right|\right) \text{ et } \ln(e_T) = \ln\left(\left|\frac{\pi}{4} - \hat{I}_T\right|\right)$$

en fonction de $\ln(h)$.



Quelles informations pouvez-vous tirer du graphique ?

5 Équations différentielles

Soit l'équation différentielle

$$y''(t) + c^2 y(t) = 0; \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1,\ 0 \leq t \leq 10$$

1. Vérifier que la solution de cette équation est

$$y(t) = \cos(ct) + \frac{1}{c}\sin(ct)$$

2. Convertir cette équation en un système de deux équations diférentielles du premier ordre.
3. En prenant $h = 0.01$ et $c = 2$, appliquer le schéma de l'Euler pour résoudre le système obtenu à la question précedente.
4. Même question pour le schéma Runge-Kutta du 2e ordre.