E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
Optimisation Linéaire
Devoir surveillé n^o 1 donné le 23-05-2013
(Durée 2 h.)
(Tout document, calculatrices et téléphones portables sont interdits)

1 Méthode du Simplexe - Pénalités - Dualité (10 Pts)

1. **(4Pts)** Résoudre le programme linéaire suivant par la méthode géometrique et par la méthode des tableaux du simplexe :

$$\textbf{(P.1)} \qquad \max_{x_1,x_2}\{Z = x_1 - 2x_2\}$$
$$\text{avec} \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 9x_2 \leq 54, \\ -5x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ 4x_1 - x_2 \leq 14, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{array} \right\}$$

2. **(6Pts)** Etablir le **problème Dual** du problème précédent.
(voir tableau des correspondances)
   - i) Montrer pourquoi pour ce problème Dual, l'algorithme du simplexe ne peut pas s'appliquer dès le début. Utiliser la **méthode des pénalités** pour établir **un premier tableau** de base réalisable.
   - ii) Trouver la solution de ce problème Dual, en utilisant le théorème de **Dualité** et les **deux formes du principe de complémentarité**.

Tableau des correspondances

Primal (P)	**Dual (D)**
Fonction Obj. (min)	Second membre
Second membre	Fonction Obj. (max)
A= matrice des contraintes	A^T matrice des contraintes
Contrainte $i : \leq\ (i : \geq)$	Variable $u_i \leq 0\ (u_i : \geq 0)$
Contrainte $i :=$	Variable $u_i \gtrless 0$
Variable $x_j \geq 0$	Contrainte $j : \leq$
Variable $x_j \gtrless 0$	Contrainte $j : =$

2 Programmation en Nombres Entiers (Coupes) (6 Pts)

On considère le problème suivant :

$$\textbf{(P.2)} \qquad \max_{x_1,x_2}\{Z = x_1 - 2x_2\} \quad \text{avec} \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 9x_2 \leq 54, \\ -5x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ 4x_1 - x_2 \leq 14, \\ x_1 \in \mathbf{N},\ x_2 \geq 0. \end{array} \right\}$$

1. **(1Pt)**

   Vérifier que par la méthode des tableaux du "simplexe", on obtient comme dernier tableau qui fournit la solution optimale du problème **(P.1)**, le tableau suivant : (à comparer ce résultat avec votre solution du 1.)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	W	s.m
0	7/4	0	0	1/4	-1	7/2
0	19/2	1	0	-1/2	0	47
0	11/4	0	1	5/4	0	59/2
1	-1/4	0	0	1/4	0	7/2

   Cette solution serait-elle une solution optimale pour le problème **(P.2)** ?

2. **(5Pts)**

   En exigeant **que x_1 soit entier** trouver deux nouveaux tableaux du simplexe (application de la méthode des **coupes**) qui pourraient vous approcher de la vraie solution. Pourriez vous en conclure déjà ? Attention ! : **Se limiter seulement à une coupe.**

   ii) Porter sur le graphique de votre **solution géometrique du 1**. (sur le plan (x_1, x_2)) la contrainte correspondant à la coupe engendrée par l'algorithme, (après élimination des variables d'écart).
   Comparer votre nouveau domaine de solutions avec celui du 1), et trouver le sommet du simplexe correspondant à l'optimum pour x_1 entier.

3 Modélisation (4 Pts)

Un industriel doit livrer trois bien A, B, et C à raison de 6 unités de A, 11 unités de B et 23 unités de C.
Il dispose de deux facteurs de production X_1 et X_2.
L'emploi d'une unité de X_1 permet de réaliser une unité de A, une unité de B et une unité de C.
Une unité de X_2 permet de réaliser une unité de A, 2 unités de B et 5 unités de C.
Le prix du facteur X_1 est de 100 Euros, celui du facteur X_2 est de 400 Euros l'unité.

- (1) Modéliser mathématiquement ce problème afin de minimiser le coût en fonction de la quantité de chaque facteur que l'industriel doit utiliser.
- (2) S'agît-il d'un problème de programmation linéaire ? Justifier votre réponse.
- (3) Ce problème peut-il se résoudre par la méthode géométrique ? Si oui, effectuer cette résolution.