Rappel de cours (I)

1) Variables aléatoires transformées

- . $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotone ; $\psi = \varphi^{-1}$

  . X ; f_X ; C_X donnés

  . $Y = \varphi(X)$

  $\Rightarrow C_Y = \varphi(C_X)$

  $$\Rightarrow f_Y = \begin{cases} f_X(\psi(y)) \cdot |\psi'(y)| & \text{si } y \in C_Y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- $E\left[\sum \alpha_i \varphi_i(X)\right] = \sum \alpha_i E[\varphi_i(X)]$

- $\tilde{X} = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ (moyenne empirique d'un échantillon)

  $$E[\tilde{X}] = \mu \quad ; \quad Var[\tilde{X}] = \frac{\sigma^2}{n}$$

  avec $(X_1 \ldots X_n)$ un n-uplet de v.a.c. <u>indépdtes</u> qui suivent la m̂ loi de probabilité de paramètres (μ, σ^2)

- Soit X_k, $k \in [\![1;p]\!]$, des v.a.c. indépdtes.

$$E\left[\sum_1^p a_k X_k + b_k\right] = \sum_1^p a_k E[X_k] + b_k$$

$$Var\left[\sum_1^p a_k X_k + b_k\right] = \sum_1^p a_k^2 \, var[X_k]$$

- Théorème limite centrale

Soient (Ω, A, P) et $X_1 \dots X_n$ une suite de v.a. indépdtes sur (Ω, A) suivant la m̂ loi de probabilité.

Si $\forall i \in \{1 \dots n\}$ $E[X_i] = \mu$, $Var[X_i] = \sigma^2$

Alors

la suite $Y_1 \dots Y_n$ où

$$Y_n = \sqrt{n} \cdot \frac{\tilde{X} - \mu}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_1^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)$$

converge en loi vers une v.a. $Y : \mathcal{N}(0;1)$.

Rappel de cours (II)

1) Processus stochastique.

On appelle processus stochastique défini sur Ω, avec T ensemble des temps et E espace des états, toute famille $\{X_{(t)}\}_{t \in T}$ de variables aléatoires à valeurs dans E.

2) Chaîne de Markov.

Une chaîne de Markov est un processus stochastique qui vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < t_0 \dots \leq t_n \in T;\ s \in T;\ i_0, i_1 \dots j \in E.$$

$$P[X_{t_n+s} = j \mid X_{t_0} = i_0 \dots X_{t_{n-1}} = i_{n-1}] = P[X_{t_n+s} = j \mid X_{t_{n-1}} = i_{n-1}]$$

Une chaîne de Markof est homogène les probabilités de transition :

$$P_{i,j}(t, s) = P[X_{t+s} = j \mid X_t = i]$$

sont indépendantes de l'instant t mais uniquemt de l'accroissement de temps s.

3) Pptés des chaînes de Markov.

- Un régime π est stationnaire ssi

$$\pi P = \pi \quad \text{avec} \quad \begin{cases} P : \text{matrice transition} \\ \sum \pi_i = 1 \\ \pi_i \geq 0 \ \forall i \in E \end{cases}$$

- On appelle régime permanent le vecteur de probabilité π tel que :

$$\pi = \lim_{n \to +\infty} \pi^{(0)} P^{(n)}$$

=> un régime permanent est stationnaire.

- Une chaîne de Markov est ergodique ssi $\exists \pi$ avec $\pi = \lim_{n \to +\infty} \pi^{(n)}$ pour tout régime initial $\pi^{(0)}$.

Ou encore : ergodique <=> possède un régime permanent indépdt du régime initial.

- On définit $f_i = P[\exists n > 0 \mid P(X_n = i \mid X_0 = i]$
  <=> probabilité de revenir au m̂ état

  - $f_i = 1$ <=> état récurrent (sur d'y revenir)
  - $f_i < 1$ <=> état transitoire (pas sur d'y revenir)
  - $P_{ii}^{(n)} = 1 \quad \forall n$ (on y reste)

- $i \sim j \iff \begin{cases} (i = j) \text{ ou} \\ \left(\begin{array}{l} \exists n \geq 1 \,/\, P_{ij}^{(n)} > 0 \\ \exists m \geq 1 \,/\, P_{ji}^{(m)} > 0 \end{array} \right) \end{cases}$

- $P_{ij}^{(n)} = P[X_{n_0 + n} = i \mid X_{n_0} = j]$

Rappel de cours (I)

1) Un ensemble E a une structure d'espace topologique si on a défini un ensemble T de parties de E, O_i appelés les ouverts de E vérifiants les pptés suivantes :

- E et $\emptyset$ appartiennent à T
- $\bigcup_i O_i = O_j$ (Union d'ouverts = ouvert)
- $\bigcap_{j=1..k} O_j = O_i$

On appelle fermé le complémentaire d'un ouvert : $\mathcal{F}_i = O_i^c$

2) Fermeture : $\bar{A} = \bigcap \mathcal{F}_i$ avec $A \subseteq \mathcal{F}_i$, $\mathcal{F}_i \in \mathcal{F}$

Intérieur : $\mathring{A} = \bigcup O_i$ avec $O_i \subseteq A$, $O_i \in T$

Extérieur : $\text{ext}(A) = \text{int}(A^c) = \mathring{A^c}$

Frontière : $\partial A = \{ x \ / \ x \notin \mathring{A} \text{ et } x \notin \text{ext}(A) \}$

Adhérent : x adhérent $A \iff \forall V(x),\ V(x) \cap A \neq \emptyset$
$\hookrightarrow \bar{A} = \{ x \ / \ x \text{ adhérent } A \}$

On note $V(x)$ tout ouvert contenant x.
$\iff$ voisinage

- A ouvert $\iff \mathring{A} = A$
- A fermé $\iff \bar{A} = A$
- $\forall$ ss-ensemble A de E (esp. top) : $E = \mathring{A} \cup \text{ext}(A) \cup \partial A$

3) A est dense dans $E \iff \bar{A} = E$ (exemple $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$)

4) Topologie induite : pour une partie $P \subset E$, on définit la topologie induite sur P par $(E, \mathcal{T})$ en prenant comme ouverts les intersections des ouverts O_i de E avec P.

$$\mathcal{T}_P = \{ O_{Pi} \} \text{ où } \forall O_i \in \mathcal{T},\ O_{Pi} = O_i \cap P$$

5) Continuité (ppté / def)

$f : E \to F$ continue ssi

$$\begin{cases} F^{-1}(O_F) = O_E \\ F^{-1}(F_F) = F_E \end{cases}$$

6) Homéomorphisme : $f : (E, \mathcal{T}_E) \longrightarrow (F, \mathcal{T}_F)$ est un homéomorphisme ssi elle est bijective et bicontinue.
Les espaces E et F sont alors appelés homéomorphes.

Rappel de cours (II)

1) Distance

$$d : \begin{array}{l} E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) \longmapsto d(x, y) \end{array}$$ est appelée distance

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \\ d(x, y) = d(y, x) & \{\text{symétrie}\} \\ d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) & \{\text{inégalité triangulaire}\} \end{cases}$$

2) Boule :

- Boule ouverte de centre a, de rayon ρ :

$$B(a, \rho) = \{ x \in E / \ d(a, x) < \rho \}$$

- Boule fermée de centre a, de rayon ρ :

$$\overline{B}(a, \rho) = \{ x \in E / d(a, x) \leq \rho \}$$

$\Rightarrow$ On appelle ensemble borné toute partie qui peut être contenue dans une boule ouverte.

3) Remarques :

- diamètre δ : $\delta(A) = \sup\limits_{x, y \in A^2} d(x, y)$

- $d(p, A) = \inf \{ d(p, a) : a \in A \}$

- $d(A, B) = \inf \{ d(a, b) : a \in A \text{ et } b \in B \}$

4) Topologie des espaces métriques.

Soit (E, d) un espace métrique.

i) $\{B_E\}$ sont les ouverts de E

ii) $\{\overline{B}_E\}$ sont les fermés de E

iii) La famille des boules ouvertes de (E, d) est une base d'une topologie sur E.

- Deux distances équivalentes sur un espace métrique (E, d) induisent la même topologie. (Réciproque fausse)

5) Distance associée à une norme vérifie :

. $d(x+z, y+z) = d(x, y)$ {translat°}

. $d(\lambda x, \lambda y) = \lambda\, d(x, y)$ {échelle}.

6) Isométrie : $f : (E, d_E) \rightarrow (F, d_F)$ est une isométrie

ssi $\forall (x, y) \in E^2 \quad d_E(x, y) = d_F(f(x), f(y))$

7) Continuité : $f : E \rightarrow F$ (deux espaces métriques)

1) f est continue en x_0 ssi :

- $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(x_0, \varepsilon) : \forall x \quad d_E(x, x_0) < \eta \Rightarrow d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

ou
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(x_0, \varepsilon) : \forall x \in B(x_0, \eta) \Rightarrow f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$

2) f est uniformément continue ssi :

- $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) : d_E(x, y) \leq \eta \Rightarrow d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

ou
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon)$ tq $\forall X \subset E$

$\delta_E(X)$ et $\delta_F(f(X))$ vérifient

$\delta_E(X) < \eta \Rightarrow \delta_F(f(X)) < \varepsilon$

Rappel de cours (II, bis)

1) Suite convergente dans un espace topologique.

↳ on dit qu'une suite d'éléments de E $\{x_n\}$ converge vers $a \in E$ si pour tout voisinage de a, $V(a)$, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tq :

$$\forall n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in V(A)$$

2) Suite convergente dans un espace métrique :

- $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : n \geq N_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$.

ou

- $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : n \geq N_0 \Rightarrow x_n \in B(a, \varepsilon)$

Ptés : 1) Si $\{x_n\}$ converge alors $\{x_n\}$ est borné.
2) limite unique (si limite il y a)
3) Si une suite converge, alors tte sous-suite converge (vers la même limite).

Théorème : Soient d_1 et d_2 deux distances équivalentes alors $\{x_n\}$ converge par rapport à d_1 ssi $\{x_n\}$ converge par rapport à d_2

3) Suite de Cauchy.

$\{x_n\}$ est dite de Cauchy ssi

$$\forall \varepsilon > 0. \exists N : \left.\begin{matrix} q \geq N \\ p \geq N \end{matrix}\right\} \Rightarrow d(x_q, x_p) \leq \varepsilon$$

Tte suite convergente est de Cauchy.

4) Théorème du point fixe

- $T : (E, d) \longrightarrow (E, d)$ est une contraction si $\forall (x, y) \in E^2$ on a :

$$d(T(x), T(y)) \leq K . d(x, y) \text{ avec } 0 \leq K < 1.$$

- Théorème du point fixe

Dans un espace métrique complet, tout contraction admet un unique point fixe x^* (tq $x^* = f(x^*)$).

Rappel : Un espace métrique est complet si toute suite de Cauchy d'éléments de E est convergente vers un élément de E.

Rappel de Cours (III)

1) Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est connexe ssi :

a) Il n'existe aucune partition de X en deux parties ouvertes non vides.

ou b) Il n'existe aucune partition de X en deux parties fermées non vides.

ou c) Les seules parties de X ouvertes et fermées sont X lui-même et $\emptyset$.

2) (A_i) une famille de parties connexes de $(X, \mathcal{T})$. Si l'intersection de cette famille est non-vide alors sa réunion est connexe.

3) La fermeture d'un connexe est connexe.

4) Toute image continue (par une fct° continue) d'un espace connexe est connexe.

---

1) A est une partie convexe de E(e.v.) si $\forall (x, y) \in A \times A$ et $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in [0; 1]$ avec $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, le vecteur $\lambda_1 x + \lambda_2 y = z$ appartient aussi à A.

2) $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si pour tout couple (α_1, α_2) de réels positifs avec $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ on a :

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

3) f concave $\iff$ $-f$ convexe.

4) Toute combinaison linéaire de fct° convexes (à coef. positifs) est une fct° convexe.

$\Leftrightarrow$ $\{f_i\}$ convexe $\Rightarrow$ $f = \sum \alpha_i f_i$ avec $\alpha_i \geq 0$ est convexe.

5) Une fct° f est convexe ssi f est continue, dérivable, et de dérivées croissantes (f'_g et f'_d).

Si f est deux fois dérivable alors f convexe $\Leftrightarrow$ $f'' \geq 0$.

6) . $\vec{\nabla} f = \left\{ \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \right\}_{i=1 \dots n}$

. $\nabla^2 f \equiv H_{ij} = \left\{ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right\}_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots n}}$

Théorème

* On appelle pt critique $\bar{x}$ tout point qui vérifie $\vec{\nabla} f(\bar{x}) = 0$

* Soit f une fct° deux fois dérivable.

i) Si $|\nabla^2 f|_{\bar{x}}$ est une matrice définie positive alors f est localement convexe en $\bar{x}$ et $\bar{x}$ est un minimum local.

ii) Si $|\nabla^2 f|_{\bar{x}}$ est définie négative alors f est localement concave et $\bar{x}$ est un maximum.

iii) Si $|\nabla^2 f|_{\bar{x}}$ n'est pas définie alors $\bar{x}$ est un point selle.

iv) Si $|\nabla^2 f|_{\bar{x}}$ est semi-définie alors on ne peut pas conclure.

Rappel de cours (IV)

1) Espace de Banach.

Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé.
E est un espace de Banach s'il est complet p.r.à la distance associée à la norme.

2) Espace de Hilbert

Soit $(H, \langle . \rangle)$ un espace préhilbertien.
H est un espace de Hilbert s'il est complet p.r.à la distance $d(x,y) = \|x - y\|$ associée à la norme, qui elle-même provient du produit scalaire : $\|x\| = \sqrt{\langle x/x \rangle}$

3) Projection orthogonale

Soit M un ss-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert H. Soit $x \in H$. Alors il éxiste un élément unique $y \in M$:

1) $\|x - y\| = \inf_{z \in M} \|x - z\|$

2) le vecteur $x - y$ est orthogonal à tous les éléments de M.

4) Soit H un espace de Hilbert.
Soit $V = \{v_i\}$ une famille d'éléments de H.
On dit que V est un système orthonormal ssi :

$$\langle v_i , v_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \quad (\text{normé}) \\ 0 & \text{si } i \neq j \quad (\text{orthogonal}) \end{cases}$$

Pour un système orthonormal donné, on associe à tout élément quelconque $x \in H$ les coefficients de Fourier généralisés de x p.r. à V par :

$$C_i = \langle x / v_i \rangle$$

Rq : Les coefficients de Fourier sont optima pour approximer x par une combinaison linéaire de V (système orthonormale) :

$$\sum \gamma_k v_k .$$

Ainsi $$\| x - \sum_{i=1}^{n} c_k v_k \| \leq \| x - \sum_{i=1}^{n} \gamma_k v_k \| \quad \forall (\gamma_i)$$

Théorème Tout espace de Hilbert admet au moins une base orthonormale

Parseval : Pour $\forall x \in H$ ayant $\{C_i\}$ comme coef. de Fourier

$$\sum C_k^2 = \| x \|^2$$

5) Un espace est dit compact ssi :
1) De $\forall$ recouvrement de K, on peut extraire un recouvrement fini.
2) Toute partie infinie P de K admet un pt d'accumulation.
3) De $\forall$ suite d'éléments de K, on peut extraire une suite convergente dans K.

Démo du théorème du point fixe.

* Plan de la démonstration

1) → Construction d'une suite adéquate.

2) → On montre que la suite est de Cauchy

3) → On prouve l'unicité d'un tel élément.

1) Soit $x_0 \in E$. On définit $\{x_n\}$ par :

$x_{k+1} = T(x_k)$ avec T une contraction.

2) • $d(x_{n+k}, x_n) = d(T(x_{n+k-1}), T(x_{n-1})) \leq K\, d(x_{n+k-1}, x_{n-1})$

et $d(x_{n+k-1}, x_{n-1}) \leq K\, d(x_{n+k-2}, x_{n-2})$

$$\Rightarrow \boxed{d(x_{n+k}, x_n) \leq K^n d(x_k, x_0)}$$

• $d(x_k, x_0) \leq d(x_k, x_{k-1}) + d(x_{k-1}, x_{k-2}) \ldots + d(x_1, x_0)$

or : $\forall \ell$, $d(x_\ell, x_{\ell-1}) \leq K^{\ell-1} d(x_1, x_0)$

$$\Rightarrow \boxed{d(x_k, x_0) \leq d(x_1, x_0) \sum_0^{k-1} K^n}$$

$$\Rightarrow \quad d(x_k, x_0) \leq d(x_1, x_0) \quad \frac{1 - K^k}{1 - K}$$

d'où $\quad d(x_{n+k}, x_n) \leq K^n \cdot \dfrac{d(x_1, x_0)}{1 - K}$ $\quad$ avec $K < 1$.

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ tq } \forall \begin{smallmatrix} k \in \mathbb{N} \\ n \geq N \end{smallmatrix} \quad d(x_{n+k}, x_n) < \varepsilon$$

La suite $\{x_n\}$ est donc de Cauchy. Or l'espace étant complet, la suite est convergente vers un point $x^* \in E$:

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x^*$$

T étant continu en x^* :

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x^*)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} x_{n+1} = f(x^*)$$

$$\Leftrightarrow \quad x^* = f(x^*).$$

3) Soit y^* un autre pt fixe : $T(y^*) = y^*$

$$d(x^*, y^*) = d(T(x^*), T(y^*)) \leq K d(x^*, y^*)$$

$$\Rightarrow d(x^*, y^*) \leq K d(x^*, y^*)$$

$\Leftrightarrow \quad d(x^*, y^*)(1 - K) \leq 0 \quad$ or

<u>or</u> $\quad d \geq 0$ et $(1 - K) > 0$

$$\Rightarrow \quad d(x^*, y^*) = 0$$

$\Leftrightarrow \quad x^* = y^*$ $\qquad$ <u>CQFD</u>

Problèmes d'optimisation avec contraintes.

→ Méthode des multiplicateurs de Lagrange.

On considère le problème suivant :

$$(P) \begin{cases} \text{optimiser } f(x) \\ \text{sous les contraintes} \\ g_i(x) = 0 \quad i = 1 \dots k. \end{cases}$$

On introduit le Lagrangien généralisé du problème (P) par la fonction $\mathcal{L}$ suivante :

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = \mathcal{L}(x_1 \dots x_n, \lambda_1 \dots \lambda_k)$$

$$= f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x)$$

1 ⇒ On résoud le système $\vec{\nabla}\mathcal{L}(\bar{x}, \bar{k}) = 0$

⇒ on obtient les pts cols.

2 ⇒ Pour chaque point col, on optimise la fct° $\mathcal{L}(x, \bar{\lambda})$ où $\bar{\lambda}$ sont des valeurs fixées.

Exercices courants (I) :
($B(S)$ complet)

1) $B(S)$ l'espace des fonctions bornées sur un ensemble S, $f \to \mathbb{R}$.

$$d(f,g) = \sup_{s\in S} |f(s) - g(s)|$$

• On sait que $\mathbb{R}$ est un espace métrique complet

(a) $\longrightarrow$ Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions dans $B(S)$ telle que $\{f_n\}$ soit de Cauchy.

$\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N : n, m \geq N \Rightarrow d(f_n, f_m) < \varepsilon$

(1) $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N : n, m \geq N \Rightarrow \sup_{s\in S} |f_n(s) - f_m(s)| < \varepsilon$

(b) $\longrightarrow$ $f : S \to \mathbb{R} \Rightarrow$ Pour une valeur σ fixe, $\{f_n(\sigma)\}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$.

■ il est évident que c'est une suite de réels

■ $d(f_n, f_m) = \sup_{s\in S} |f_n(s) - f_m(s)|$

$\Rightarrow \forall \sigma \quad |f_n(\sigma) - f_m(\sigma)| \leq d(f_n, f_m)$

(2) $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N : n, m \geq N \Rightarrow d(f_n(\sigma), f_m(\sigma)) \leq d(f_n, f_m) < \varepsilon$

(c) $\longrightarrow$ $\mathbb{R}$ étant complet, on en déduit que $\{f_n(\sigma)\}$ converge vers un réel $f(\sigma) \in \mathbb{R}$. La distance sur $\mathbb{R}$ étant continue, on passe à la limite et on obtient :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N : n \geq N \Rightarrow |f_n(\sigma) - f(\sigma)| < \varepsilon$

(d) $\longrightarrow$ $|f(\sigma)| = |f(\sigma) - f_{N+1}(\sigma) + f_{N+1}(\sigma)| \leq |f(\sigma) - f_{N+1}(\sigma)| + |f_{N+1}(\sigma)|$

* $|f(\sigma) - f_{N+1}(\sigma)| < \varepsilon$
* $|f_{N+1}(\sigma)| \in B(S)$ et est donc borné :
$\exists A \in \mathbb{R} : |f_{N+1}(\sigma)| \leq A$

d'où $|f(\sigma)|$ est borné par $(A + \varepsilon)$.

donc, pour tout σ (σ varie), $f(\sigma)$ est bornée ;
f est donc bornée : $f \in B(S)$.

Ccl : $\forall \varepsilon > 0, \exists N : n \geq N \Rightarrow \sup\limits_{s \in S} |f_n(s) - f(s)| < \varepsilon$

La suite $\{f_n\}$ de Cauchy converge vers $f \in B(S)$.
Ceci étant vrai pour toute suite $\{f_n\}$, on en conclut que $B(S)$ est un espace métrique complet.

Remarque : L'espace $C(\Delta)$ est l'espace des fonctions numériques continues sur un intervalle fermé borné $\Delta \subset \mathbb{R}$.
$C(\Delta)$ est un sous-espace de $B(S) \Rightarrow$ est complet.

Exercices courants (II)

(Approximation au sens des moindres carrés)

- $V = \{v_1 \dots v_m\}$ un système orthonormal.
$x \in H$ et $\{c_1 \dots c\}$ ses coefficients de Fourier.
Alors pour toute famille $\{\gamma_i\}_{i=1\dots m}$ de $\mathbb{R}$,

1) $$\left\| x - \sum_1^m c_k v_k \right\| \leq \left\| x - \sum_1^m \gamma_k v_k \right\|$$

2) $$\| x \|^2 = \sum_1^m c_k^2 + \left\| x - \sum c_k v_k \right\|^2$$

Deux méthodes

1) Application du projeté orthogonal.

$\sum_1^m \gamma_i v_i$ est un ss.-espace vectoriel de H fermé.

$\Rightarrow \forall x \in H, \exists y \in \sum_1^m \gamma_i v_i$ vérifiant :

$$\| x - y \| = \inf_{z \in \sum \gamma_i v_i} \| x - z \|$$

y est noté $x_\perp$ et vaut $\sum_1^m c_i v_i$ avec

$c_i = \langle x / v_i \rangle$

2) Optimisation classique

$$d^2(x, \sum_1^n \gamma_i v_i) = \| x - \sum_1^n \gamma_i v_i \|^2$$

$$= \langle x / x \rangle - 2 \langle x / \sum_1^n \gamma_i v_i \rangle$$

$$+ \langle \sum_1^n \gamma_i v_i / \sum_1^n \gamma_i v_i \rangle$$

$$= \| x \|^2 - 2 \sum_1^n \gamma_i \langle x / v_i \rangle + \sum_1^n \gamma_i^2$$

Soit $G(\gamma_0 \dots \gamma_n) = \| x \|^2 - 2 \sum_1^n \gamma_i \langle x / v_i \rangle + \sum_1^n \gamma_i^2$

$$\vec{\nabla} G = 0 \iff \begin{cases} 2\gamma_0 - 2\langle x / v_0 \rangle = 0 \\ \vdots \\ 2\gamma_n - 2\langle x / v_n \rangle \end{cases}$$

$$\iff \gamma_i = \langle x / v_i \rangle \quad \forall i \in [\![1 ; n]\!]$$

$\Rightarrow (\langle x / v_0 \rangle, \langle x / v_1 \rangle \dots \langle x / v_n \rangle)$ est un pt critique.

$$\vec{\nabla}^2 G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & & (0) & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & (0) & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ forme quadratique définie positive

$\Rightarrow$ le pt critique est minimum.

La distance $d(x, \sum_1^n \gamma_i)$ est minimale pour $\gamma_i = c_i$.