TD 1 Optimisation linéaire

$\boxed{\text{Exo 1:}}$

$$a = \begin{cases} 2x + 4y \leq 10 \\ 3x - 4y \geq 2 \\ x + y \geq 0 \end{cases}$$

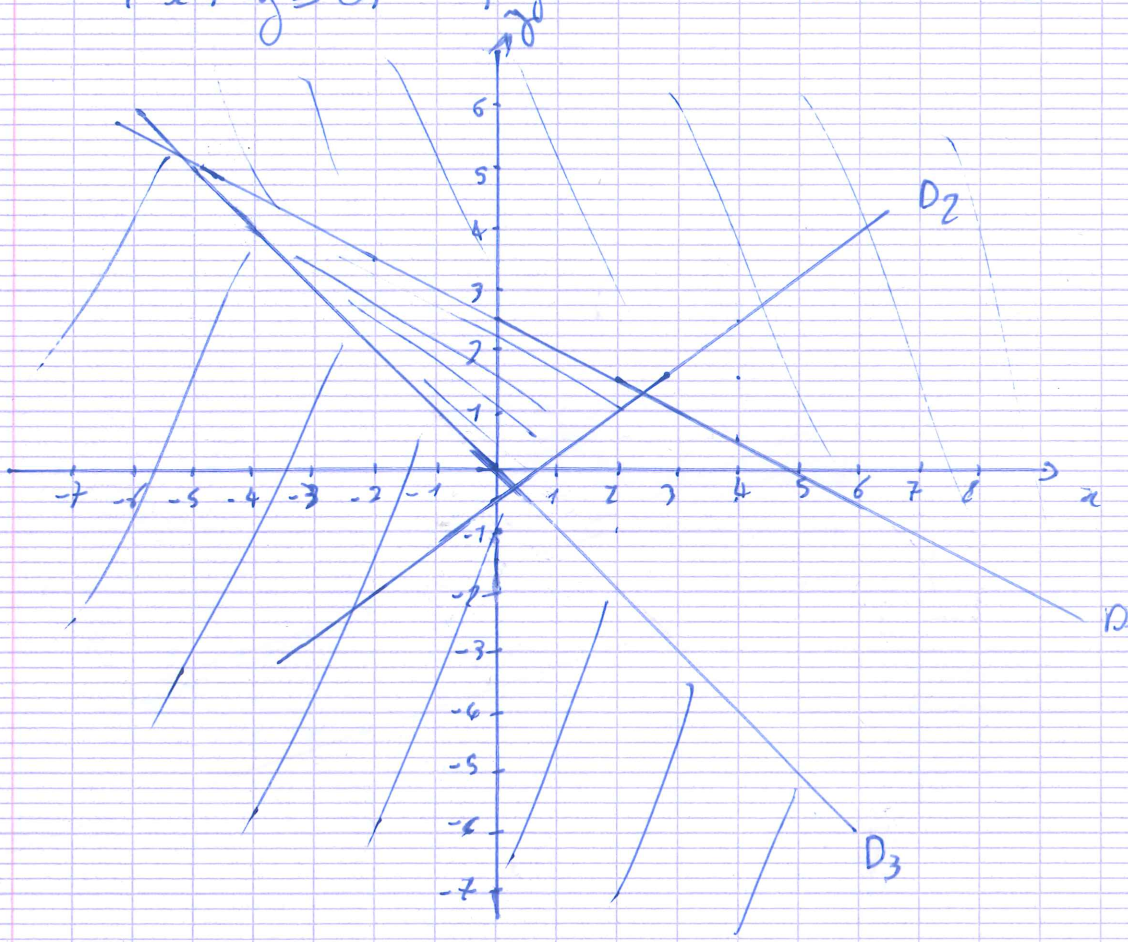
$$\begin{cases} y = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x & D_1 \\ y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} & D_2 \\ y = -x & D_3 \end{cases}$$

$D_1 = D_2 \Leftrightarrow \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}x$

$\Leftrightarrow 5 - x = \frac{3}{2} - x$

$\Leftrightarrow 2x = 5 - \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{7}{4}$



Exo 2 :

max $(Z = x + 3y)$

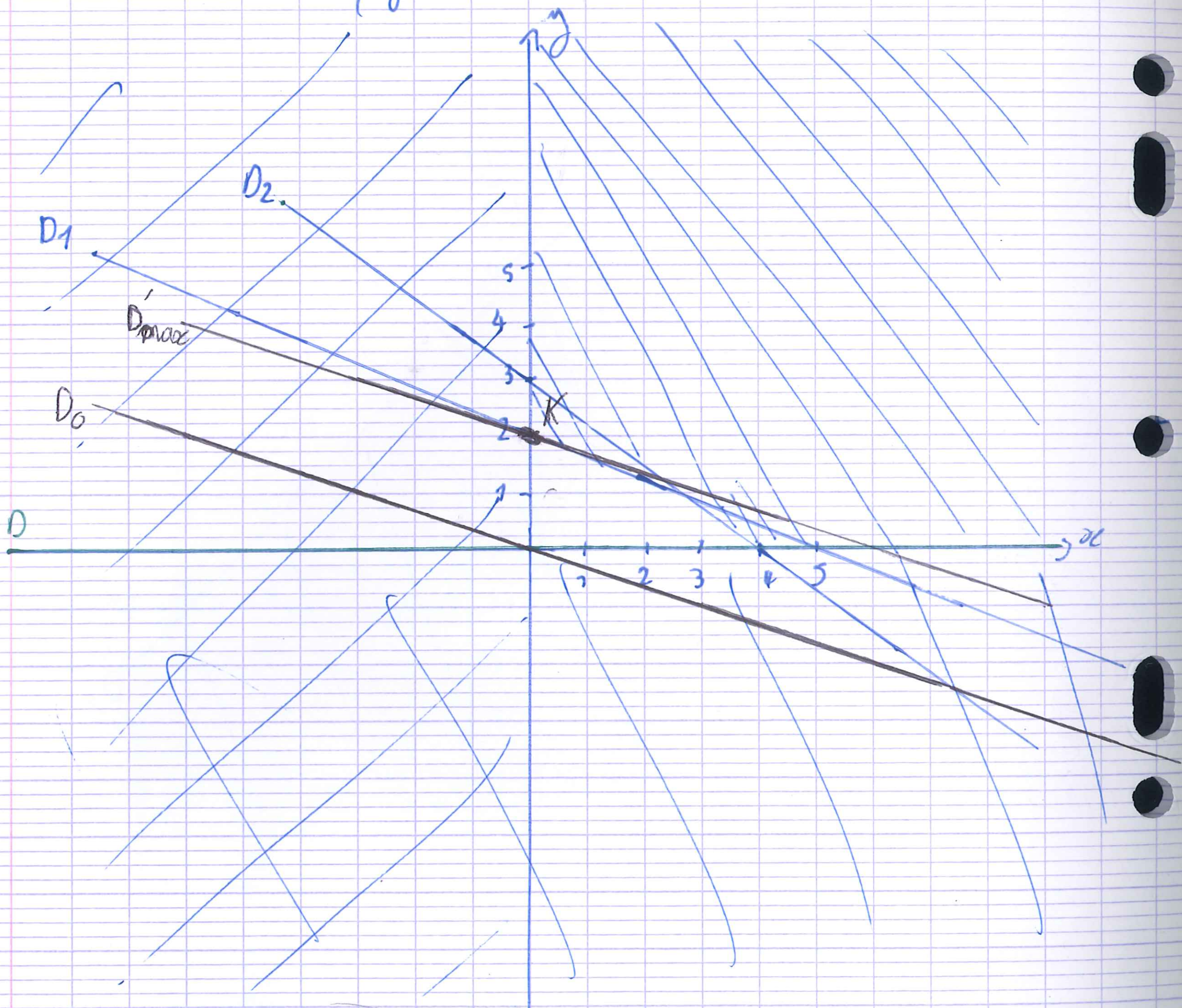
avec les contraintes $\begin{cases} 2x + 5y \leq 10 \\ 3x + 4y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

$y = 2 - \frac{2}{5}x$ D_1

$y = 3 - \frac{3}{4}x$ D_2

D_3

D_4



K : ~~$2 - \frac{2}{5}x = 0 \iff \frac{2}{5}x = 2$~~

~~$\iff x =$~~

K : $= D_1 \cap \{x = 0\}$

$\iff y = 2$

donc $K(0, 2) \Rightarrow Z = 0 + 3 \times 2 = 6$

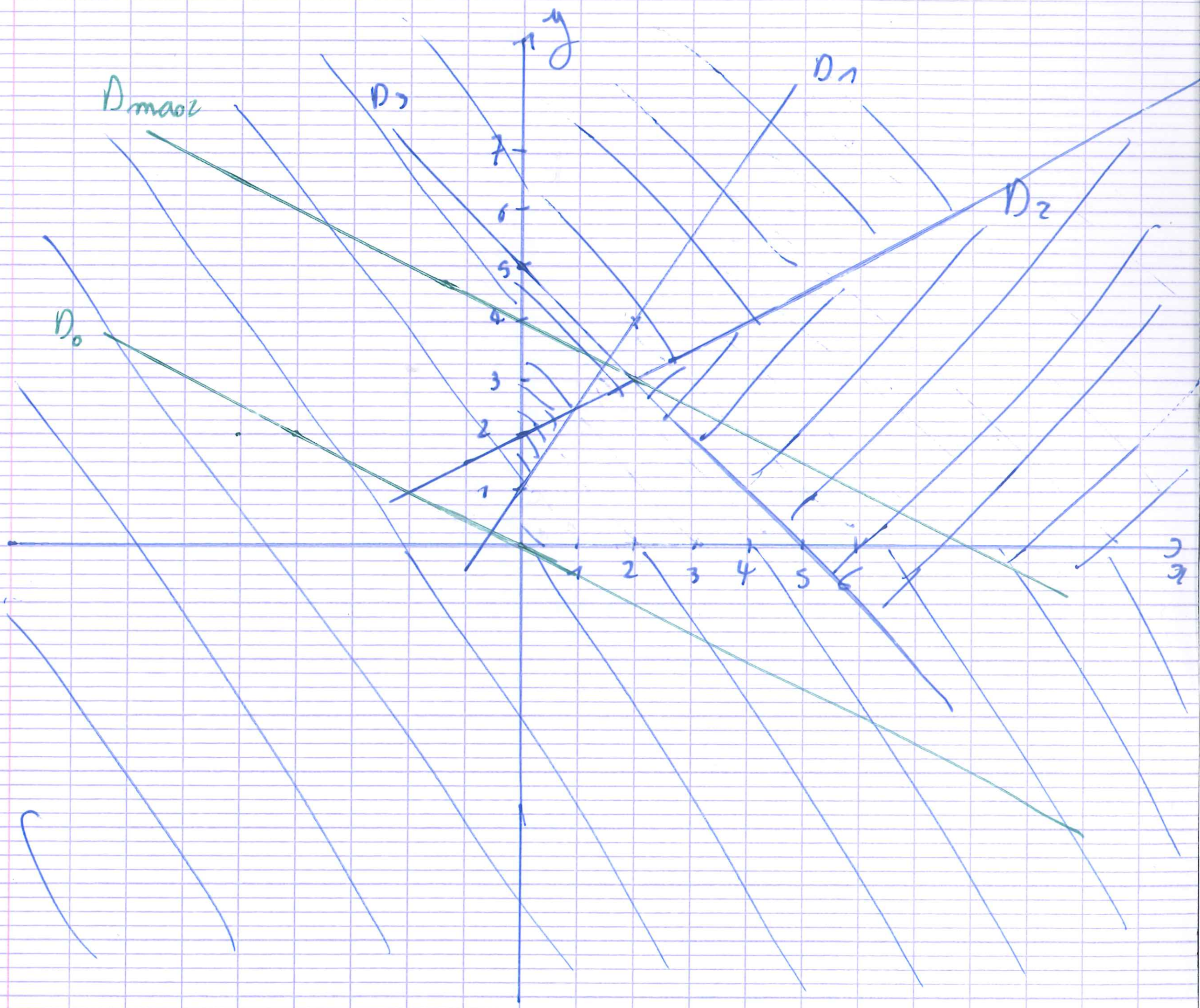
Exo 3 : $\max (Z = x_1 + 2x_2)$

contraintes $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$

$x_2 = \frac{3}{2}x_1 + 1$ D_1

$x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 2$ D_2

$x_2 = -x_1 + 5$



$K := D_2 \cap D_3$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x_1 + 2 = -x_1 + 5$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2}x_1 = 3$

$\Leftrightarrow x_1 = 2$

$\Leftrightarrow K(2,3)$ $\Rightarrow Z = 2 + 2 \times 3$

$= 8$

méthode des tableaux du simplexe

forme standard $\min(W = -Z = -x_1 - 2x_2$

avec les contraintes
$$-3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_4 = 4$$
$$x_1 + x_2 + x_5 = 5$$
$$x_1 \geq 0 ;\ x_2 \geq 0 ;\ x_3 \geq 0 ;\ x_4 \geq 0 ;\ x_5 \geq 0$$

1er tableau

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w	sm		
-1	-2	0	0	0	-1	0	← ligne des coups	L_1
-3	2	1	0	0	0	2		L_2
1	2	0	0	1	0	4		L_3
1	1	0	0	1	0	5		L_4

pivot

La base $B = (x_3, x_4, x_5)$ est réalisable car d'éléments positifs, sa sol est
$$\tilde{x}_3 = 2$$
$$\tilde{x}_4 = 4$$
$$\tilde{x}_5 = 5$$
$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = 0 \text{ (hors base)}$$
$$w = 0$$

cette solution n'est pas optimale
car $c_i < 0$
il faut changer de base

variable entrante : x_2 $(c_2 < c_1)$
variable sortante : posons $v = x_2$

$$\begin{cases} 0 + 2v + x_3 = 2 \\ 0 + 2v + x_4 = 4 \\ 0 + v + x_5 = 5 \end{cases} \qquad \min\left(\frac{2}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1}\right) = 1$$

$\Rightarrow$ var sortante est x_3 $\Rightarrow$ la base devient

$B = (x_2, x_4, x_5)$ Pivot : $\cap$ ligne var sortante avec colonne var entrante

$L_2' \leftarrow \frac{L_2}{2}$

$L_1' \leftarrow 2\frac{L_2}{2} + L_1$

$L_3' \leftarrow -2\frac{L_2}{2} + L_3$

$L_4' \leftarrow -1\frac{L_2}{2} + L_4$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w	SM
-4	0	1	0	0	-1	2
$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	1
2	0	-1	1	0	0	2
$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	4

La base actuelle est $B = (x_2, x_4, x_5)$ sa sol est

$\tilde{x}_2 = 1$

$\tilde{x}_4 = 2$ cette solution n'est pas optimale car $c_1 < 0$

$\tilde{x}_5 = 4$

$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_3 = -2$

$w = -2$

var entrante x_1

var sortante posons $v = x_1$

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}v + x_2 = 1 \\ 2v + x_4 = 2 \\ \frac{5}{2}v + x_5 = 4 \end{cases}$$

on n'en tient pas compte (dès que le coef de v est <0)

$\min\left(\frac{2}{2}, \frac{4}{5/2}\right) = 1$

$\Rightarrow$ var sortante x_4

La base devient $B = (x_1, x_2, x_5)$

le pivot : 2

$L_3' \leftarrow \frac{L_3}{2}$

$L_1' \leftarrow 4\frac{L_3}{2} + L_1$

$L_2' \leftarrow 3\frac{L_3}{2} + L_2$

$L_4' \leftarrow -5\frac{L_3}{2} + L_4$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w	SM
0	0	-1	2	0	-1	6
0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{5}{2}$
1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	1
0	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{4}$	1	0	$\frac{3}{2}$

⋮

dernier tableau

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w	SM
0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	-1	8
0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	3
1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	2
0	0	1	$-\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	2

la base $B = (x_1, x_2, x_3)$ est réalisable car sa sol est

$x_1^* = 2$ $x_3^* = 2$

$x_2^* = 3$ $x_4^* = x_5^* = 0$ (hors base)

$w = -8 \Rightarrow z = 8$

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs

Optimisation Linéaire T.D.1
le 20 janvier 2014

(Introduction à la modélisation et la résolution géometrique des problèmes linéaires aux contraintes inegalités. Initiation aux tableaux du simplexe.)

1 Représenter graphiquement l'ensemble des points M de coordonnées $(x,\ y)$, vérifiant les systèmes suivants :

$$a = \left\{ \begin{array}{c} 2x + 4y \leq 10 \\ 3x - 4y \geq 2 \\ x + y \geq 0 \end{array} \right\}.$$

$$b = \left\{ \begin{array}{c} 2x + 3y \leq 12 \\ 3x + y \leq 9 \\ x + y \geq 2 \\ x \geq 0;\ \ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$c = \left\{ \begin{array}{c} |x + 2y| \leq 6 \\ |x - 2y| \geq 2 \end{array} \right\}$$

2

Optimiser par la méthode géométrique du simplexe :

$$\max(Z = x + 3y)$$

$$\text{avec les contraintes :} \quad \left\{ \begin{array}{c} 2x + 5y \leq 10 \\ 3x + 4y \leq 12 \\ \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

3

Optimiser par la méthode géométrique et la méthode des tableaux du simplexe :

$$\max(Z = x_1 + 2x_2)$$

$$\text{avec les contraintes :} \quad \left\{ \begin{array}{c} -3x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ \\ x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs

Optimisation Linéaire T.D.3
le 3 février 2014
(Introduction à la modélisation et la résolution géometrique des problèmes linéaires.
Initiation aux tableaux du simplexe, et la méthode des pénalités)

1

Un investisseur doit choisir parmi les 2 types d'actifs **Ilog** et **BNP-Paribas**. L'action **Ilog** a une espérance de gain de 80 Euros et l'action **BNP-Paribas** 60 euros.

L'investisseur ne peut acheter au total que 100 actions et compte dépenser au plus 800 Euros.

L'action **Ilog** coûte 5 Euros et l'action **BNP-Paribas** 10 Euros.

L'achat des actions se fait d'autre part via une banque qui touche une commission de 2 Euros par action de **Ilog** et 1 Euro par action **BNP-Paribas**. L'investisseur ne veut pas dépasser 150 Euros de commissions.

Combien d'actions de chaque type l'investisseur doit acheter pour maximiser ses revenus futurs ?

Modéliser et résoudre ce problème d'optimisation linéaire par la méthode géometrique et la méthode des tableaux du simplexe.

2

Pour les deux problèmes suivants montrer pourquoi l'algorithme du simplexe ne peut pas s'appliquer dès le début. En utilisant la méthode des pénalités établir le 1^{er} tableau du simplexe ayant une base réalisable :

i) (P.0.1)

$$\min(W = x_1 - 2x_2 + 2x_3)$$

$$\text{avec} \left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 = -4 \\ x_1 \geq 0 \quad \forall i = 1,2,3 \end{array} \right\}$$

ii) (P.0.2)

$$\min(Z = x_1 - 2x_2)$$

$$\text{avec} \left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 + 3x_2 \leq -4 \\ x_1 \geq 0 \quad \forall i = 1,2 \end{array} \right\}$$

TD 3 Optimisation linéaire

Exo 1 :

x_1 action Ilog

x_2 action BNP

$\max\ (Z = 80x_1 + 60x_2)$ $\Rightarrow$ D_0 $x_2 \leq -\frac{80}{60}x_1 = -\frac{4}{3}x_1$

avec $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 100 \\ 5x_1 + 10x_2 \leq 800 \\ 2x_1 + x_2 \leq 150 \\ x_1 \geq 0 \ ; \ x_2 \geq 0 \end{cases}$

D_1 $x_2 \leq 100 - x_1$

D_2 $x_2 \leq 80 - \frac{1}{2}x_1$

D_3 $x_2 \leq 150 - 2x_1$

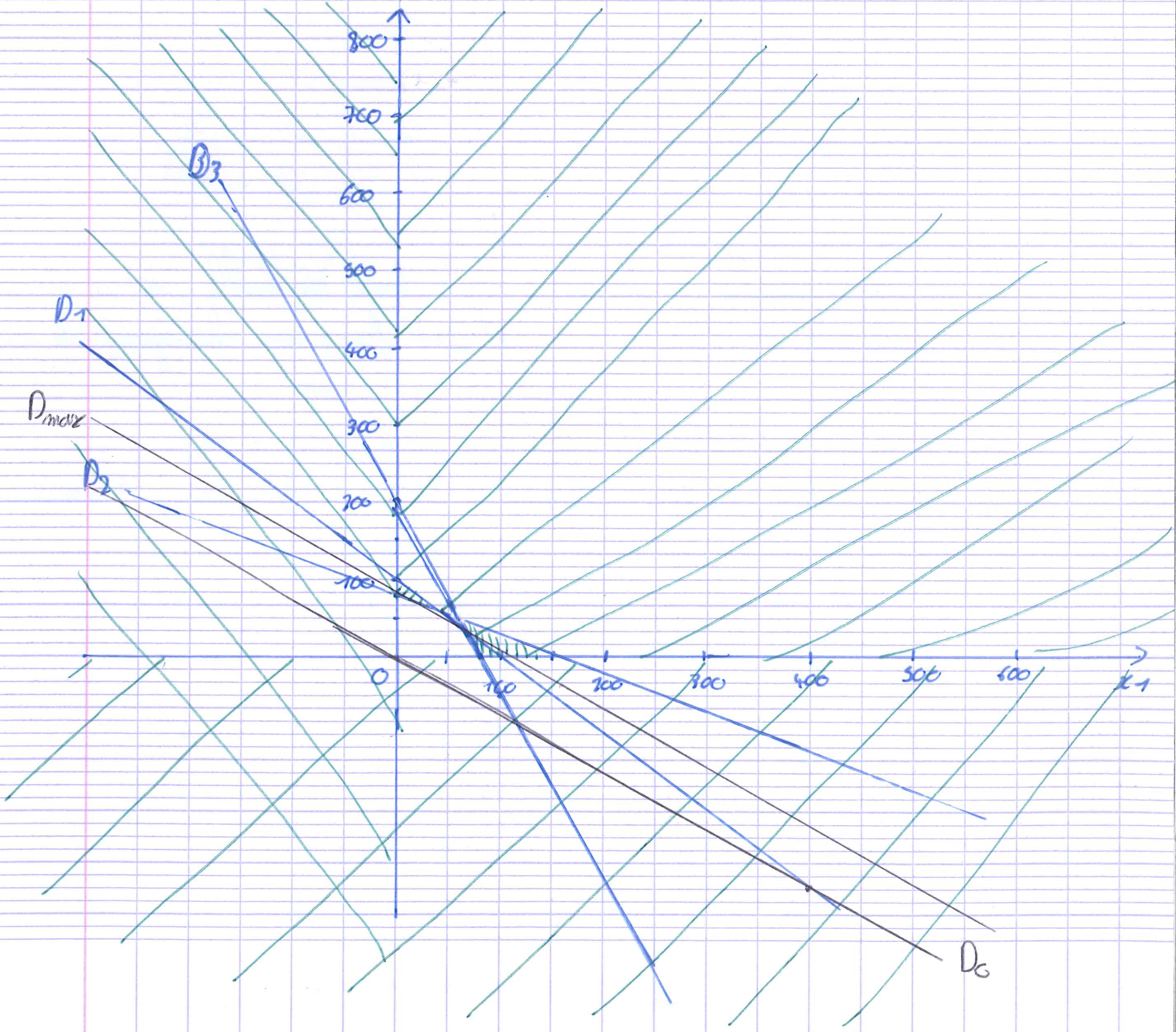


Tableau du simplexe

forme standard

$\min (W = -Z = -80x_1 - 60x_2)$

avec
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 100 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 150 \\ 5x_1 + 10x_2 + x_5 = 800 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 5 \end{cases}$$

1er tableau du simplexe

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	W	S.M
-80	-60	0	0	0	-1	0
1	1	1	0	0	0	100
pivot → $\boxed{2}$	1	0	1	0	0	150
5	10	0	0	1	0	800

base actuelle $B = (x_3, x_4, x_5)$ base réalisable, sa solution n'est pas optimale car $c_1 < c_2 < 0$ il faut faire un changement de base

var entrante : x_1

var sortante : on pose $v = x_1$
$$\begin{cases} 1.v + x_3 = 100 \\ 2.v + x_4 = 150 \\ 5.v + x_5 = 800 \end{cases} \qquad \tilde{v} = \min\left(\frac{100}{1}, \frac{150}{2}, \frac{800}{5}\right) = 7$$

$\Rightarrow$ var sortante est x_4 $\Rightarrow$ base devient (x_1, x_4, x_5)

pivot = 2

$L_3' \leftarrow \frac{L_3}{2}$

$L_1' \leftarrow 40L_3 + L_1$

$L_2' \leftarrow -\frac{1}{2}L_3 + L_2$

$L_4' \leftarrow -\frac{5}{2}L_3 + L_4$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w	S.M
0	0	40	20	0	-2	7000
0	1	2	-1	0	0	50
1	0	-1	1	0	0	50
0	0	-15	5	1	0	50

sol $x_1^* = x_2^* = x_5^* = 50$

$x_3^* = x_4^* = 0$ hors base

$w^* = -7000 \Rightarrow Z = 7000$

$\boxed{\text{Exo 2 :}}$

ii) P.O.2

$$\min (Z = x_1 - 2x_2)$$

avec $\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 3 \\ -x_1 + 3x_2 \leqslant -4 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$

<u>forme standard</u>

$$\min (W = x_1 - 2x_2)$$

avec $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \ldots \leqslant 3 \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 \leqslant -4 \\ x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, 5 \end{cases}$

x_1	x_2	x_3	x_4		W	SM
1	-2	0	0		-1	0
1	1	1	0		0	3
-1	3	0	1		0	-4

base $B=(x_3, x_4)$ base non réalisable car $x_4 = -4$
On utilise la méthode des pénalités

1ère contrainte n'a pas besoin de var artificielle
2ème contrainte $x_1 - 3x_2 - x_4 = 4$ on a besoin d'1 var arti

$$x_1 - 3x_2 - x_4 + x_1^a = 4$$

$$\Rightarrow x_1^a = 4 - x_1 + 3x_2 + x_4$$

$$\begin{aligned}\tilde{z} &= x_1 - 2x_2 + Mx_1^a \\ &= x_1 - 2x_2 + M(4 - x_1 + 3x_2 + x_4) \\ &= (1-M)x_1 + (3M-2)x_2 + Mx_4 + 4M\end{aligned}$$

$$\min(\tilde{z} = (1-M)x_1 + (3M-2)x_2 + Mx_4 + 4M)$$

avec $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - 3x_2 - x_4 + x_1^a = 4 \\ x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, 3 \quad x_1^a \geq 0 \end{cases}$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_1^a	$\tilde{z}$	S.M
$(1-M)$	$(3M-2)$	0	M	0	-1	$-4M$
1	1	1	0	0	0	3
1	-3	0	-1	1	0	4

base actuelle $B = (x_3, x_1^a)$ bas réalisable, sa solution n'est pas optimale car $c_1 < 0$, il faut faire un changement de base
Var entrante : x_1

ici il n'y a pas de solution (vérifier avec la méthode graphique sol $= \phi$)

i) P.O.1 $\min(W = x_1 - 2x_2 + 2x_3)$

avec $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 = -4 \\ x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, 3 \end{cases}$

forme standard

$\min(W = x_1 - 2x_2 + 2x_3)$

avec $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 + x_5 = -4 \\ x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, 5 \end{cases}$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	W	s.M
1	-2	2	0	0	-1	0
1	1	-1	1	0	0	3
-1	3	0	0	1	0	-4

base actuelle
$B = (x_4, x_5)$
↳ base non réalisable
car $x_5 = -4$

on utilise la méthode des pénalités

1ère contrainte : $x_1 + x_2 - x_3 + x_1^a = 3 \Rightarrow x_1^a = 3 - x_1 - x_2 + x_3$

2ème contrainte : $x_1 - 3x_2 - x_5 + x_2^a = 4 \Rightarrow x_2^a = 4 - x_1 + 3x_2 + x_5$

$\Rightarrow x_1^a + x_2^a = 7 - 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5$

$\tilde{W} = x_1 - 2x_2 + 2x_3 + M(x_1^a + x_2^a)$

$= x_1 - 2x_2 + 2x_3 + M(7 - 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5)$

$\min(\tilde{W} = (1-2M)x_1 + 2(M-1)x_2 + (M-2)x_3 + 7M)$

avec $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_1^a = 3 \\ x_1 - 3x_2 + x_2^a = 4 \\ x_i \geq 0 \quad \forall i \quad x_i^a \geq 0 \; \forall i \end{cases}$

x_1	x_2	x_3		x_1^a	x_2^a	$\hat{w}$	SM
$1-2M$	$2(M-1)$	$M+2$	$\longrightarrow$	0	0	-1	$-7M$
$\boxed{1}$	1	-1	$\longrightarrow$	1	0	0	3
1	-3	0	$\longrightarrow$	0	1	0	4

base actuelle $B = (x_1^a, x_2^a)$ réalisable, sa sol n'est pas optimale car $c_1 < 0$, il faut faire un changement de base
var entrante : x_1
var sortante : on pose $v = x_1$

$1v + x_1^a = 3$
$1v + x_2^a = 4$ $\quad \min\left(\frac{3}{1}, \frac{4}{1}\right) = 3$

$\Rightarrow$ var sort x_1^a

pivot : 1
$L_2' \leftarrow L_2$
$L_1' \leftarrow (2M-1) L_2 + L_1$
$L_3' \leftarrow -L_2 + L_3$

⋮

x_1	x_2	x_3	x_1^a	x_2^a	$\hat{w}$	SM
0	9	0	$M+2$	$M-3$	-1	-6
1	-3	0	0	1	0	4
0	-4	1	-1	1	0	1

sol optimale $x_1^* = 4$
$x_3^* = 1$
$x_2^* = x_1^{a*} = x_2^{a*} = 0$ (hors base)
$\hat{w} = 6$

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
Optimisation Linéaire T.D.4
le 10 février 2014
(Introduction à la modélisation et a résolution des problèmes linéaires, par la méthode Géometrique ei celle des tableaux du Simplexe Méthode des Pénalités et méthode de Dualité)

Une compagnie américaine possède deux mines d'or, A et B, dont les productions journalières sont données par le tableau suivant (unité : 1 tonne).

Qualité	Mine A	Mine B
Haute	1	2
Moyenne	3	2
Basse	5	2

La compagnie a besoin de : 80 tonnes d'or de haute qualité, 160 tonnes d'or de qualité moyenne et 200 tonnes d'or de basse qualité. Les entrepreneurs de la compagnie, s'interrogent sur le nombre de jours que chacune des mines doit fonctionner, si le coût journalier de la production est de 200 dollars pour la mine A et de 200 dollars pour la mine B.

- i. Formaliser mathématiquement ce problème d'optimisation. Donner la solution du primal en programmation linéaire par la méthode géométrique. Interpréter votre résultat.
- ii. Etablir le premier tableau de la méthode du simplexe, ayant une base réalisable. Résoudre le problème des mines d'or par la méthode des pénalités.
- iii. Etablir le problème dual du i). Résoudre ce nouveau problème par l'algorithme du simplexe.

Rappel : tableau des correspondances

Primal (P)	**Dual (D)**
$\min(Z = cx)$	$\max(W = ub)$
$Ax = b \quad x > 0$ A= matrice des contraintes	$(uA)^T \leq c^T$ A^T (transp. de A) matr. des contr.
Contrainte $i : \geq$	Variable $u_i \geq 0$
Contrainte $i : =$	Variable $u_i \gtrless 0$
Contrainte $i : \leq$	Variable $u_i \leq 0$
Variable $x_j \geq 0$	Contrainte $j : \leq$
Variable $x_j \gtrless 0$	Contrainte $j : =$

- iv. Comparer la solution du dual obtenue en iii. avec la solution du primal du i. Montrer la cohérence de vos résultats par application du théorème de dualité et du principe de complémentarité. Comment pourrait-on obtenir la solution du primal directement par la procédure détaillée faite dans le dual ? Justifier votre réponse.

TD 4 : Optimisation

$\min (Z = 200x_1 + 200x_2)$

avec $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 80 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 160 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 200 \\ x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, 2 \end{cases}$

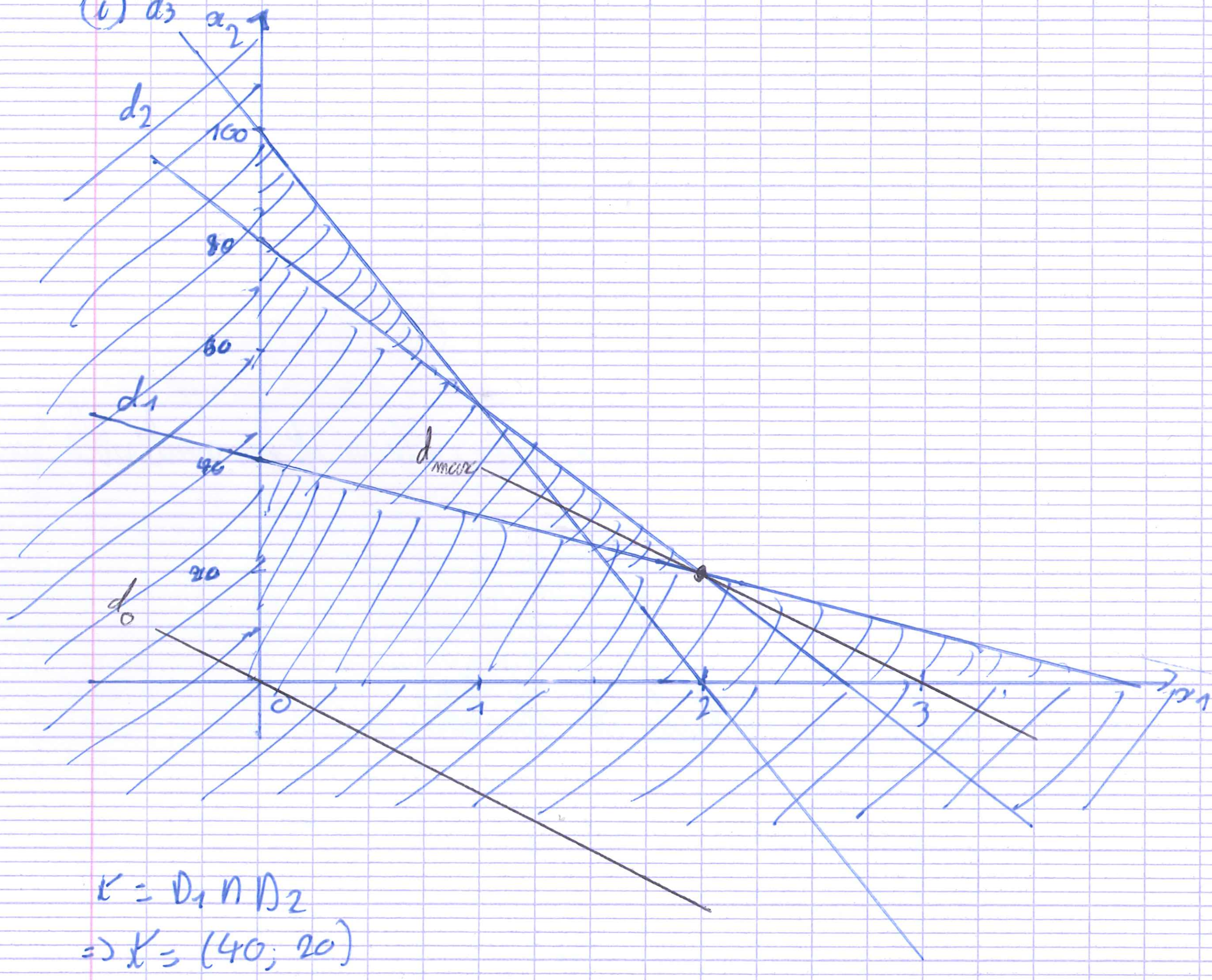
$x_2 = -x_1 \quad d_0$

$x_2 \geq 40 - \frac{1}{2}x_1 \quad d_1$

$x_2 \geq 80 - \frac{3}{2}x_1 \quad d_2$

$x_2 \geq 100 - \frac{5}{2}x_1 \quad d_3$

(i)



$X = D_1 \cap D_2$

$\Rightarrow X = (40; 20)$

$Z_{min} = 200 \cdot 40 + 200 \cdot 20 = 12000$

ii forme standard

$$\min \left(z = 200x_1 + 200x_2 \right) \quad \text{(primal pour iii et iv)}$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 80$$
$$3x_1 + 2x_2 - x_4 = 160$$
$$5x_1 + 2x_2 - x_5 = 200$$
$$x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, 5$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Z	S.M
200	200	0	0	0	-1	0
1	2	-1	0	0	0	80
3	2	0	-1	0	0	160
5	2	0	0	-1	0	200

base actuelle $B = (x_3, x_4, x_5)$, elle n'est pas réalisable car

$$\begin{cases} x_3 = -80 \\ x_4 = -160 \\ x_5 = -200 \end{cases}$$

<u>Utilisons la méthode des pénalités</u>

$$\min \left(\tilde{z} = 200x_1 + 200x_2 + M(x_1^a + x_2^a + x_3^a) \right)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_1^a = 80 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_4 + x_2^a = 160 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_5 + x_3^a = 200 \\ x_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, 5 \\ x_i^a \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \min \left(\tilde{z} = -(9M - 200)x_1 - (6M - 200)x_2 + Mx_3 + Mx_4 + Mx_5 + 440M \right)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_1^a = 80 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_4 + x_2^a = 160 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_5 + x_3^a = 200 \end{cases}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	x_2^a	x_3^a	$\tilde{z}$	S.M
$-(9M-200)$	$-(6M-200)$	M	M	M	0	0	0	-1	$-440M$
1	2	-1	0	0	1	0	0	0	80
3	2	0	-1	0	0	1	0	0	160
5	2	0	0	-1	0	0	1	0	200

base actuelle $B=(x_1^a, x_2^a, x_3^a)$ réalisable, sa solution n'est pas optimale car $c_1<0$ et $c_2<0$

var entrante : x_1 car $c_1 < c_2$

var sortante : posons $x_1 = v$

$$\left.\begin{array}{l} v + x_1^a = 80 \\ 3v + x_2^a = 160 \\ 5v + x_3^a = 200 \end{array}\right\} \min\left(\frac{80}{1} ; \frac{160}{3} ; \frac{200}{5}\right) = 40$$

↳ var sortante x_2^a

⋮

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	x_2^a	x_3^a	z	S.M
0	0	50	50	0	$M-50$	$M-50$	M	-1	-12000
0	1	$-3/4$	$-1/4$	0	$3/4$	$1/4$	0	0	20
0	0	1	-2	1	-1	2	-1	0	40
1	0	$1/2$	$-1/2$	0	$-1/2$	$1/2$	0	0	40

(iii) Dual $\max (Z = 80u_1 + 160u_2 + 200u_3)$

$$\begin{cases} u_1 + 3u_2 + 5u_3 \leq 200 \\ 2u_1 + 2u_2 + 2u_3 \leq 200 \\ u_i \geq 0 \quad \forall i = 1,..,3 \end{cases}$$

forme standard

$\min (W = -Z = -80u_1 - 160u_2 - 200u_3)$

$$\begin{cases} u_1 + 3u_2 + 5u_3 + u_4 \leq 200 \\ 2u_1 + 2u_2 + 2u_3 + u_5 \leq 200 \\ u_i \geq 0 \quad \forall i = 1,..,5 \end{cases}$$

1er tableau du simplexe

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	W	S.M
-80	-160	-200	0	0	-1	0
1	3	$\boxed{5}$	1	0	0	200
2	2	2	0	1	0	200

base actuelle $B = (u_4, u_5)$ réalisable, sa solution n'est pas optimale car $c_1 < 0$, $c_2 < 0$, $c_3 < 0$

var entrante : u_3

var sortante : posons $v = u_3$

$$\begin{cases} 5v + u_4 = 200 \\ 2v + u_5 = 200 \end{cases} \quad \min\left(\frac{200}{5}, \frac{200}{2}\right) = 40$$

$\hookrightarrow$ var sortante u_4

pivot $\Rightarrow$ 5