DS Probabilités - Décembre 2012

Titre de la note 12/02/2013

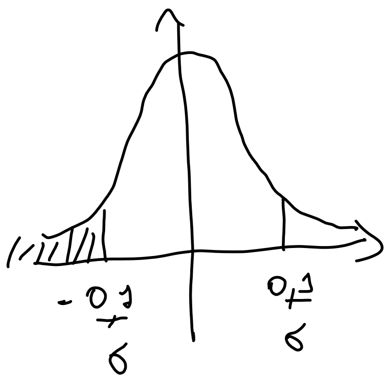
I X = taille d'un joueur de ligue 1.

X suit la loi normale $\mathcal{N}(1{,}8\,;\sigma^2)$

1) $P(1{,}7 \leq X \leq 1{,}9) = 0{,}7$

Soit $Y = \dfrac{X-1{,}8}{\sigma}$ la variable centrée réduite. Y suit $\mathcal{N}(0,1)$

On a : $P\left(-\dfrac{0{,}1}{\sigma} \leq Y \leq \dfrac{0{,}1}{\sigma}\right) = 0{,}7 = P\left(Y \leq \dfrac{0{,}1}{\sigma}\right) - P\left(Y \leq -\dfrac{0{,}1}{\sigma}\right)$



$$P\left(Y \leq -\frac{0{,}1}{\sigma}\right) = P\left(Y \geq \frac{0{,}1}{\sigma}\right) = 1 - P\left(Y \leq \frac{0{,}1}{\sigma}\right)$$

$$\Rightarrow 0{,}7 = 2P\left(Y \leq \frac{0{,}1}{\sigma}\right) - 1$$

$$\Rightarrow P\left(Y \leq \frac{0{,}1}{\sigma}\right) = \frac{1{,}7}{2} = 0{,}85$$

Tables $\Rightarrow$ $\frac{0,1}{\sigma} \simeq 1,04$ $\Rightarrow$ $\sigma = \frac{0,1}{1,04} = \frac{1}{10,4}$

$$\begin{array}{r|l} 1000 & 104 \\ \hline 0640 & 0,095 \\ 016 & \end{array}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\sigma \simeq 0,096}$

2. $\underline{P(X \leq 1,7)} = P\left(Y \leq -\frac{0,1}{\sigma}\right) = 1 - P\left(Y \leq \frac{0,1}{\sigma}\right) = 1 - 0,85$ (question précédente)

$= \underline{0,15}$

3. $\underline{P(X \geq 1,9)} = P\left(Y \geq \frac{0,1}{\sigma}\right) = P\left(Y \leq -\frac{0,1}{\sigma}\right)$ (cf graphique)

$= \underline{0,15}$

$\underline{\text{II}}$

i) X suit $\mathcal{B}(n, p)$

Support $= D_X = X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$

fonction de masse : $P(x) = \begin{cases} P(k) = P(X = k) = C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k} & \text{pour } x : k \in \{0, 1, \dots, n\} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

Fonction de répartition : $P(X \leq x) = F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sum_{[k] \leq x} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$E(X) = np$

ii) Y suit $\mathcal{P}(\lambda)$

support $= D_Y = \mathbb{N}$

fonction de masse : $P_X(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} & \text{si } x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

Espérance : $E(X) = \lambda$

Soit $\{X_n\}$ une suite de variables aléatoires telles que X_n suit

$\mathcal{B}(n,p)$. On va montrer que $\{X_n\}$ converge en loi quand $\begin{matrix} n \to +\infty \\ p \to 0 \end{matrix}$

vers X qui suit $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda = \lim\limits_{\substack{n \to +\infty \\ p \to 0}} (np)$

$$P(X_n = k) = C_n^k \, p^k \, (1-p)^{n-k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \, p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{(np)^k}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) (1-p)^n \, (1-p)^{-k}$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{j}{n}\right) = 1$ pour $j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$

$$\lim_{\substack{n \to +\infty \\ p \to 0}} (1-p)^n = \lim_{\substack{n \to +\infty \\ p \to 0}} e^{n \ln(1-p)} = \lim_{\substack{n \to +\infty \\ p \to 0}} e^{-np} = e^{-\lambda}$$

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$\Rightarrow$ Pour n assez grand et p suffisamment petit, la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ peut être approximée par la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$

iii) n lancés - Z = nombre d'apparitions de pile

$\Rightarrow$ valeurs de $Z = \{0, 1, \dots, n\}$

$\Rightarrow$ loi de Z : $\mathcal{B}(n,p)$ avec p = probabilité d'obtenir pile $= \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Z suit $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$

Si n assez grand, $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$ est approximée par $\mathcal{P}(\frac{n}{2})$

$\Rightarrow$ Z suit approximativement $\mathcal{P}(\frac{n}{2})$

$n = 200$

- $P(30 \leq Z \leq 40) = \sum_{k=30}^{40} C_{200}^{k} \frac{1}{2^k} \frac{1}{2^{200-k}} = \frac{1}{2^{200}} \sum_{k=30}^{40} C_{200}^{k}$

si Z suit $\mathcal{B}(200, \frac{1}{2})$

• Si Z suit $\mathcal{P}\left(\frac{200}{2}\right) = \mathcal{P}(100)$

$$P(30 \leq Z \leq 40) = e^{-100} \sum_{k=30}^{40} \frac{100^k}{k!}$$

• n inconnu

$$P(Z \geq 1) \geq 0,9$$

$$P(Z \geq 1) = 1 - P(Z=0)$$

Si Z suit $\mathcal{P}\left(\frac{n}{2}\right)$, $P(Z=0) = e^{-n/2}$

$$\Rightarrow \quad 1 - e^{-n/2} \geq 0,9 \quad \Rightarrow \quad e^{-n/2} \leq 0,1 = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{n}{2} \leq \ln\left(\frac{1}{10}\right) = -\ln 10 \qquad \Rightarrow \quad n \geq 2 \ln 10 \simeq 4,6$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{n \geq 5}$$

III clients $= \Omega = R_1 \cup R_2 \cup R_3$

$P(R_1) = 0{,}2$ $\quad P(R_2) = 0{,}5$ $\quad P(R_3) = 0{,}3$

A = avoir un accident

$P(A \mid R_1) = 0{,}05$ $\quad P(A/R_2) = 0{,}15$ $\quad P(A/R_3) = 0{,}3$

1) $P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap R_1) + P(A \cap R_2) + P(A \cap R_3)$

$= P(R_1) . P(A \mid R_1) + P(R_2)\, P(A/R_2) + P(R_3)\, P(A \mid R_3)$

(formule de Bayes)

$P(A) = 0{,}2 \times 0{,}05 + 0{,}5 \times 0{,}15 + 0{,}3 \times 0{,}3$

$= 0{,}01 + 0{,}075 + 0{,}09 = \boxed{0{,}175 = P(A)}$

2) $P(R_1 \mid A^c) = \dfrac{P(R_1 \cap A^c)}{P(A^c)} = \dfrac{P(R_1 \cap A^c)}{1 - P(A)}$

$$P(R_1) = P(R_1 \cap A) + P(R_1 \cap A^c) \Rightarrow P(R_1 \cap A^c) = 0{,}2 - 0{,}01 = 0{,}19$$

$$\Rightarrow P(R_1 | A^c) = \frac{0{,}19}{1 - 0{,}175} = \frac{0{,}19}{0{,}825} = \frac{190}{825} = \frac{38}{165} = 0{,}23$$

$$\begin{array}{r|l} 380 & 165 \\ \cline{2-2} 0500 & 0{,}23 \\ 005 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \underline{P(R_1 | A^c) = 0{,}23}$$

$\underline{\text{IV}}$ i) X suit $\text{Exp}[\theta, \nu]$

$C_X =]\nu, +\infty[$ support

fonction de densité $= f_X(x) = \begin{cases} \theta\, e^{-\theta(x-\nu)} & \text{si } x > \nu \\ 0 & \text{si } x < \nu \end{cases}$

fonction de répartition : $F_X(x) = 0$ si $x < \nu$

si $x > \nu$, $F_X(x) = \int_\nu^x \theta\, e^{-\theta(t-\nu)} dt = \theta\, e^{\theta\nu} \left[-\frac{e^{-\theta t}}{\theta} \right]_\nu^x$

$\Rightarrow$ si $x > \nu$ $\qquad F_X(x) = \theta e^{\theta \nu}\left(-\frac{e^{-\theta x}}{\theta} + \frac{e^{-\theta \nu}}{\theta}\right)$

$$= 1 - e^{-\theta(x-\nu)}$$

$$\Rightarrow \boxed{F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\theta(x-\nu)} & \text{si } x > \nu \\ 0 & \text{si } x < \nu \end{cases}}$$

fonction de fiabilité : $\Phi_X(x_0) = P(X > x_0) = 1 - P(X \leq x_0) = 1 - F_X(x_0)$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi_X(x_0) = \begin{cases} e^{-\theta(x_0-\nu)} & \text{si } x_0 > \nu \\ 1 & \text{si } x_0 < \nu \end{cases}}$$

ii) $\quad P(T > 7) = 0,06$

1. $\quad T$ suit une loi exponentielle avec $\nu = 0$, $\theta > 0$

on a $\quad P(T>7) = \phi_T(7) \simeq e^{-7\theta} = 0,06$

$$\Rightarrow -7\theta = \ln(0,06) = -2,8 \quad \Rightarrow \theta = 0,4$$

$$\Rightarrow \boxed{f_T(t) = \begin{cases} 0,4\, e^{-0,4t} & \text{si } t>0 \\ 0 & \text{si } t<0 \end{cases}}$$

2) $\quad E(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_T(t)\, dt = \int_0^{+\infty} 0,4\, t\, e^{-0,4t}\, dt$

$$= 0,4 \times \left(\underbrace{\left[-\frac{t\, e^{-0,4t}}{0,4} \right]_0^{+\infty}}_{0} + \frac{1}{0,4} \int_0^{+\infty} e^{-0,4t}\, dt \right)$$

$$= \left[-\frac{e^{-0,4t}}{0,4} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{0,4} = \frac{10}{4} = 2,5$$

$\Rightarrow$ $\underline{E(T) = 2,5 \text{ ans}}$

Fonction de répartition.

$$\boxed{F_T(t) = \begin{cases} 1 - e^{-0,4t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}}$$

3) $$P(T \geq 6 \mid T \geq 3,5) = \frac{P(T \geq 6 \cap T \geq 3,5)}{P(T \geq 3,5)} = \frac{P(T \geq 6)}{P(T \geq 3,5)}$$

$$= \frac{e^{-0,4 \times 6}}{e^{-0,4 \times 3,5}} = e^{-0,4 \times 2,5} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

on retrouve le résultat en utilisant que T suit $Exp(0,4 ; 3,5)$

$$P(T > 6) = \Phi_T(6) = e^{-0,4(6-3,5)} = e^{-0,4 \times 2,5} = e^{-1} = \boxed{\frac{1}{e}}$$