Formulaire Probabilité

❖ Tribu

Une tribu sur Ω est une famille F de sous-ensembles de Ω telle que :

- → Ω et $\emptyset$ sont dans F
- → Si $A \in F$ alors $A^c \in F$
- → Si $A_n \in F (n \geq 1)$, alors $\left(\bigcup_{n\in\aleph} A_n\right) \in F$ (stabilité par union dénombrable)

❖ Mesure de Probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable, on appelle mesure de probabilité une fonction $P : A \rightarrow R^+$ verifiant :

- → $P(A) \geq 0 \; \forall \; A \in \mathcal{A}$.
- → $P(\Omega) = 1$
- → $\forall \{A_i\}_{i\in\aleph}$ famille dénombrable d'événements **mutuellement exclusifs** :

$$A_i \in \mathcal{A} \; et \; A_i \cap A_j = \emptyset \; si \; i \neq j$$

$$P\left(\bigcup A_i\right) = \sum P(A_i)$$

❖ Cas discret

- → $P(\Omega) = P(\cup\{\omega\}) = \sum P(\{\omega\}) = 1$
- → $P(\{\omega\}) \geq 0$
- → $P(\emptyset) = 0$
- → $\forall A \in \mathcal{A} \; et \; A \neq \emptyset, \; P(A) = \sum_{\omega\in A} P(\{\omega\})$

❖ Cas continu

Soit P définie par :

$$P[A] = \oint_A f(x)dx \quad pour \; tout \; intervalle \; A \; de \; R.$$

Alors P est une mesure de probabilité ⇔ f est une fonction de densité :

- → $f(x) \geq 0 \; pour \; tout \; x \in R$
- → f admet au plus un nombre fini de discontinuités sur chaque intervalle fini de R.
- → f est intégrable au sens de Lebesgue et

$$\oint_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

❖ <u>Analyse combinatoire</u>

1. Arrangements avec répétitions (ordonnée, avec répétition) de p éléments parmi n

$$n^p$$

2. Arrangements sans répétition (ordonnée, pas de répétition) de p éléments parmi n

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

3. Permutations sans répétition de n éléments

$$n!$$

4. Permutations avec répétitions de n éléments divisés en k sous-groupe distinct d'éléments identiques

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$$

5. Combinaisons sans répétition (pas ordonnée, pas de répétition) de p éléments parmi n

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

6. Conbinaisons avec répétitions (pas ordonnée, avec répétition) de p éléments parmi n distincts (pb des cloisons)

$$C_{n+p-1}^p = \frac{A_{n+p-1}^p}{p!} = \frac{(n+p-1)!}{p!\,(n-1)!}$$

❖ <u>Probabilité conditionnelle et indépendance</u>

- Conditionnelle

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$$

- Théorème

  $Soit\ B_i\ une\ partition\ de\ \Omega$ avec $\mathrm{B_i} \in \mathcal{A}\ et\ P(B_i) > 0, alors$:

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad , \qquad P[A] = \sum_{i \in \mathcal{N}} P[A|B_i].P[B_i]$$

- Formule de Bayes (même hypothèses qui ci-dessus)

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad , \qquad P[B_j|A] = \frac{P[A|B_j].P[B_j]}{\sum_{i \in \mathcal{N}} P[A|B_i].P[B_i]} = \frac{P[A \cap B_j]}{P[A]}$$

- Indépendance

Deux évènements sont indpts ⇔ $P[A \cap B] = P[A].P[B]$

❖ Variable aléatoire

1. Définition

Une application X : $\Omega \to R$ est une variable aléatoire ssi :

$$\forall x \in R, \{\omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$$

2. Loi de probabilité de X

Si X est une variable aléatoire, alors on définit $P_X[A] = P[\{\omega : X(\omega) \in A\}]$

3. Fonction de répartition

$$F_X(x) = P_X[\ ]-\infty; x]\ ] = P[\{X \leq x\}]$$

4. Fonction de masse

$$p_X(x) = P_X[\{x\}] = P[\{X = x\}]$$

5. Support d'une v.a. discrète

$$D_x = \{x : p_X(x) > 0\}$$

$$\sum_{x \in D_x} p_X(x) = 1$$

6. Support d'une v.a. continue

$$C_x = \{x : f_X(x) > 0\}\text{, } avec\ f_X\ la\ fct\ de\ densit\acute{e}$$

$$F_X(x) = \oint_{-\infty}^{x} f_X(x)dx$$

$$F_X'(x) = f_X(x)$$

❖ <u>Espérance</u>

1. Cas Discret

$$E[X] = \sum_{x \in D_x} x.p_X(x)$$

2. Cas Continu

$$E[X] = \mu_X = \oint_{-\infty}^{+\infty} x.f_X(x)dx \text{ , avec } f_X \text{ la fct de densité}$$

3. $k^{\text{ième}}$ Moment d'une v.a. continue

→ P.r.à l'origine

$$\mu'_k = E[X^k]$$

→ P.r.à la moyenne

$$\mu_k = E[(X - \mu_X)^k]$$

4. Variance et écart-type

→ Variance

$$\sigma_X^2 = \mu_2$$

→ Ecart-type

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$$

5. Qques pptés

Soit Y = aX +b

$$E[Y] = a.E[X] + b$$

$$\sigma_Y^2 = a^2.\sigma_X^2$$

❖ Fonction génératrice et Fonction caractéristique

1. Fonction génératrice des moments M_X

$$M_X(t) = E[e^{Xt}] = \oint_{-\infty}^{+\infty} e^{xt}.f_X(x)dx \;\; , avec\ f_X\ la\ fct\ de\ densité$$

Et on a que :

$$\mu'_k = E[X^k] = M_X^{(k)}(0)$$

2. Fonction caractéristique ϕ_x

$$\phi_X = E\left[e^{i\omega X}\right] = \oint_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x}.f_X(x)dx \;\; , avec\ f_X\ la\ fct\ de\ densité$$

❖ Lois de probabilités à connaître

A. Les lois discrètes

- Loi de bernouilli

Loi de Bernouilli de paramètre p	
Notation	X : B(p)
Support	$D_x = \{0; 1\}$
Fonction de masse	$p_X = \begin{Bmatrix} p^x(1-p)^{1-x}\ pour\ tout\ x\ \in\ D_x \\ 0\ ailleurs \end{Bmatrix}$
Espérance	P
Variance	P(1-P)
-	-
-	-

- Loi Binomiale

Loi binomiale de paramètre n et p	
Notation	X : B(n,p)
Support	$D_x = \{0; 1 \dots; n\}$
Fonction de masse	$p_X = \begin{Bmatrix} C_n^x\ p^x(1-p)^{n-x}\ pour\ tout\ x\ \in\ D_x \\ 0\ \qquad ailleurs \end{Bmatrix}$
Espérance	np
Variance	$np(1-p)$
-	-
-	-

- Loi de Poisson

Loi de Poisson de paramètre **λ** ∈ $\boldsymbol{R}^+$	
Notation	X : P[λ]
Support	$D_x = \{0; 1 \dots; n\}$
Fonction de masse	$p_X = \begin{Bmatrix} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\ pour\ tout\ x\ \in\ D_x \\ 0\ \qquad ailleurs \end{Bmatrix}$
Espérance	λ
Variance	λ
-	-
-	-

B. Les lois continues

○ Loi uniforme

Loi uniforme sur [a,b]	
Notation	X : $\mathcal{U}([a;b])$
Support	$C_x = [a;b]$
Fonction de densité	$f_X = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \; si \; x \in C_x \\ 0 \quad ailleurs \end{cases}$
Fonction de répartition	$F_X = \begin{cases} 0 \; si \; x < a \\ \frac{x-a}{b-a} \; si \; a \leq x < b \\ 1 \; si \; x \geq b \end{cases}$
Fonction génératrice	$M_X(t) = E[e^{Xt}] = \begin{cases} \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)} \; si \; x \in C_x \\ 1 \; si \; t = 0 \end{cases}$
Fonction caractéristique	$\phi_X = E\left[e^{i\omega X}\right] = \frac{e^{i\omega b} - e^{i\omega a}}{i\omega\left(b-a\right)}$
-	-

○ Loi Normale

Loi normale de paramètre μ et σ^2	
Notation	X : $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
Support	$C_x = R$
Fonction de densité	$f_X = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
Fonction de répartition	$F_X = \begin{cases} 0 \; si \; x < a \\ \frac{x-a}{b-a} \; si \; a \leq x < b \\ 1 \; si \; x \geq b \end{cases}$
Fonction génératrice	$M_X(t) = E[e^{Xt}] = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Espérance	μ
Variance	σ^2

Remarque :
Si

$$\mu = 0 \; et \; \sigma^2 = 1$$

Alors on parle de v.a. centrée réduite.

- Loi Exponentielle

Loi exponentielle de paramètre $\boldsymbol{\theta}$ et $\boldsymbol{\nu}$	
Notation	X : $Exp(\theta, \nu)$
Support	$C_x =]\, \nu \,;\, +\infty[$
Fonction de densité	$f_X = \begin{Bmatrix} \theta e^{-\theta(x-\nu)} \; si\ x \in C_x \\ 0 \qquad\qquad ailleurs \end{Bmatrix}$
Fonction de répartition	$F_X =$
Fonction génératrice	$M_X(t) = E[e^{Xt}] = \dfrac{\theta e^{t\nu}}{\theta - t}$
Espérance	$\nu + \dfrac{1}{\theta}$
Variance	$\dfrac{1}{\theta^2}$