Fonction d'utilité

La fonction d'utilité peut être considérée comme un outil nous permettant de déterminer la décision optimale concernant la personne qui prend cette décision.
Cela veut dire que chaque individu a sa propre fonction d'utilité.
Néanmoins nous allons essayer d'étudier par la suite des classes de fonction d'utilité usuelles.

1 Fonction d'utilité

1.1 Définitions

Définition 1 : Relation de préférence
Soit $x, y \in (\mathbb{R}_+^n)^2$,
- $x \succ y$ signifie que x est préférable à y
- $y \succ x$ signifie que y est préférable à x
- $x \sim y$ signifie que x est équivalent à y

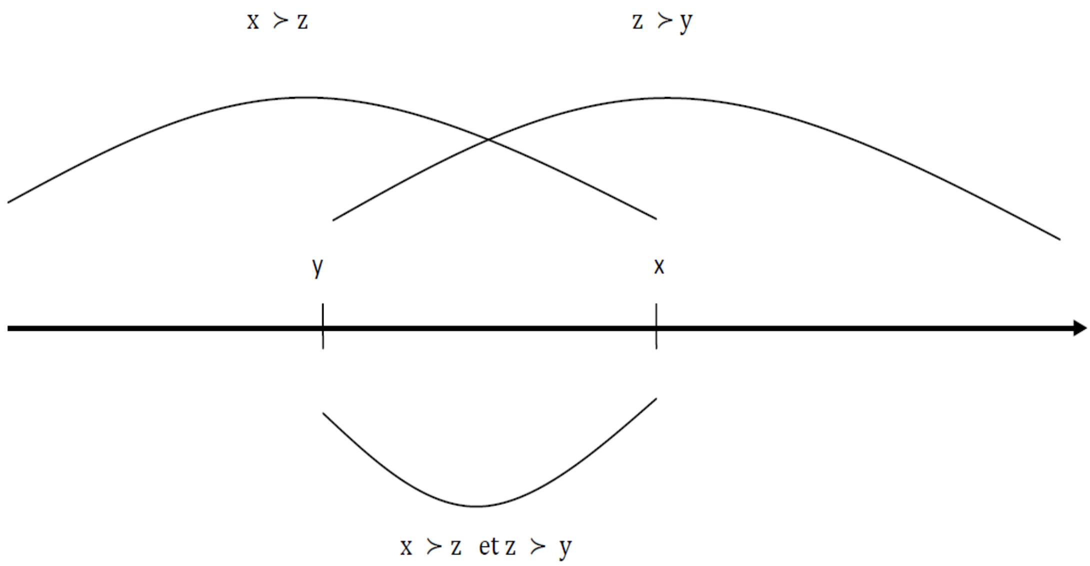
Définition 2 : Ordre ordinale
On classe les différents élements d'un ensemble selon un ordre de préférence.
Cette ordre de préférence peut varier entre les différentes personnes.
Par exemple l'ordre de préférence pour les différentes options disponible à l'EISTI.

Définition 3 : Ordre cardinale
On classe les différents élements d'un ensemble selon une distance que nous choissisons en fonction des différents critères de selections.
Par exemple la moyenne semestrielle est une relation d'ordre cardinale.

1.2 Fonction d'utilité ordinale

On fait deux hypothèses :
– H1 : les préférences sont asymétriques. On ne peut pas avoir x et y tel que $y \succ x$ et $x \succ y$.
– H2 : Les préférences sont négativement transitives. On considére $x \succ y$.
  - soit $x \succ z$

- soit $z \succ y$
- soit $x \succ z$ et $z \succ y$



<u>Théorème</u> :
Si H1 et H2 sont vraies alors :
- la préférence ϕ est antiréflexive
- ϕ est transitive càd $x \succ y$ et $y \succ z \Rightarrow x \succ z$
- il y a acyclicité càd $x_1 \succ x_2 \succ \cdots \succ x_{n-1} \succ x_n \succ x_1$ alors $x_1 \neq x_n$

<u>Définition</u> : Préférence faible
Soit $x, y \in (\mathbb{R}_+^n)^2$
- $x \succeq y$: x faiblement préféré à y si et seulement si $y \succ x$ est faux
- $x \succeq y$ si et seulement si x est au moins aussi bon que y
- $x \sim y$ si et seulement si $x \succ y$ et $y \succ x$ sont faux

<u>Propriété</u> :
Si la préférence stricte ($\succ$) a les deux propriété cités alors la préférence faible ($\succeq$) est complète càd :
Soit $x, y \in (\mathbb{R}_+^n)^2$
- la préférence faible est transitive : $x \succeq y$ et $y \succeq z \Rightarrow x \succeq z$
- la relation d'indifférence ($\sim$) est transitive, symétrique et réflexive :

Soit $x, y, z, t \in \mathbb{R}_+^n$ si $z \sim x$, $y \sim t$ et si $x \succ y$ alors $z \succ y$ et $x \succ t$

Définition : Fonction d'utilité
Une fonction d'utilité décrivant un pré-ordre de préférence est une fonction $U : \mathbb{R}_+^n \mapsto \mathbb{R}$ tel que :
- $x \succ y$ ssi $U(x) > U(y)$
- $x \sim y$ ssi $U(x) = U(y)$

Hypothèse de continuité :
Soit Y le sous ensemble de des vecteurs de $\mathbb{R}_+^n$ qui sont strictement préférés à x :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^n, \quad Y = \left\{ y \in \mathbb{R}_+^n | y \succ x \right\}$$

Soit Z le sous ensemble de des vecteurs de $\mathbb{R}_+^k$ tel que x leur soit strictement préféré

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^n, \quad Z = \left\{ z \in \mathbb{R}_+^n | x \succ z \right\}$$

Théorème :
Soit une relation de préférence définie sur $\mathbb{R}_+^n$ et respectant les trois propriétés suivantes.
Alors la préférence peut être représentée par une fonction d'utilité continue.

$$\text{U} : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{lll} x \succ y & ssi & U(x) > U(y) \\ x \sim y & ssi & U(x) = U(y) \end{array} \right\}$$

Propriétés :

1. Monotonie :
   $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^n)^2$
   Si $x \geq y$ alors $x \succ y \Leftrightarrow U(x) > U(y)$
2. Strict convexité :
   $\forall t \in [0, 1], \quad \forall (x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^n)^3$
   $y \neq z, \quad y \succ x, \quad z \succ y \quad \Rightarrow \quad t \cdot y + (1-t) \cdot z \succ x$
3. Strict quasi-concavité :
   $\forall t \in [0, 1], \quad \forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^n)^2$
   $$y \neq x, \quad y \succ x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} U(y) > U(x) \\ U(t \cdot y + (1-t) \cdot x) > U(x) \end{cases}$$

1.3 Fonction d'utilité cardinale

Soit $\tilde{X}$ une variable aléatoire discrète associé au vecteur de probabilités P tel que :

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

Où $\forall i \in [1, n]$, p_i est la probabilité associé à $\tilde{x}_i$ et tel que :

$$U(\tilde{X}) = \sum_{i=1}^{n} p_i U(\tilde{x}_i) = E[U(\tilde{X})]$$

Définition : Loterie
On appelle loterie, $\mathcal{L}$, la donnée de p, x et y d'un ensemble. On note $\mathcal{L}(p, x, y)$ cette loterie, avec la probabilité p d'avoir l'évenement x et la probabilté (1-p) d'avoir l'évenement y.

Remarque :
On appelle équivalent certain de $\mathcal{L}(p, x, y)$ l'élément $z \in \mathbb{R}_+^n$ tel que $z \sim \mathcal{L}(p, x, y) \Leftrightarrow U(z) = p \cdot U(x) + (1 - p) \cdot U(y)$

Propriétés :

1. Indépendance forte :
   $\forall (x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^n)^3 \; x \sim y \Rightarrow \forall p \in [0, 1] \; \mathcal{L}(p, x, z) \sim \mathcal{L}(p, y, z)$
2. Continuité :
   $\forall (x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^n)^3 \; x \succ y \succ z \Rightarrow \exists !$ p tq $y \succ \mathcal{L}(p, x, z)$
3. Monotonicité :
   $$(x, y, z, t) \in (\mathbb{R}_+^n)^4 \quad \left.\begin{array}{c} x \succ y \succ t \\ x \succ z \succ t \\ y \sim \mathcal{L}(p_1, x, t) \\ z \sim \mathcal{L}(p_2, x, t) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y \succ z \Leftrightarrow p_1 > p_2 \\ y \sim z \Leftrightarrow p_1 = p_2 \end{array}\right.$$
4. Valeurs intermédiaires :
   $$(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^n)^3 \quad \left.\begin{array}{c} x \succeq y \succeq z \\ y \nsim z \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \alpha \in [0, 1], \quad y \sim \alpha \cdot x + (1 - \alpha) \cdot z$$

Théorème :
Pour toute relationde préférence qui est définie sur $\mathbb{R}_+^n$ et qui satisfait les propriétés précédentes, alors il existe une fonction d'utilité U : $\mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ telle que :

$$x \succ y \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} U(x) > U(y) \\ U(E(x)) > E(U(x)) \end{array} \right.$$

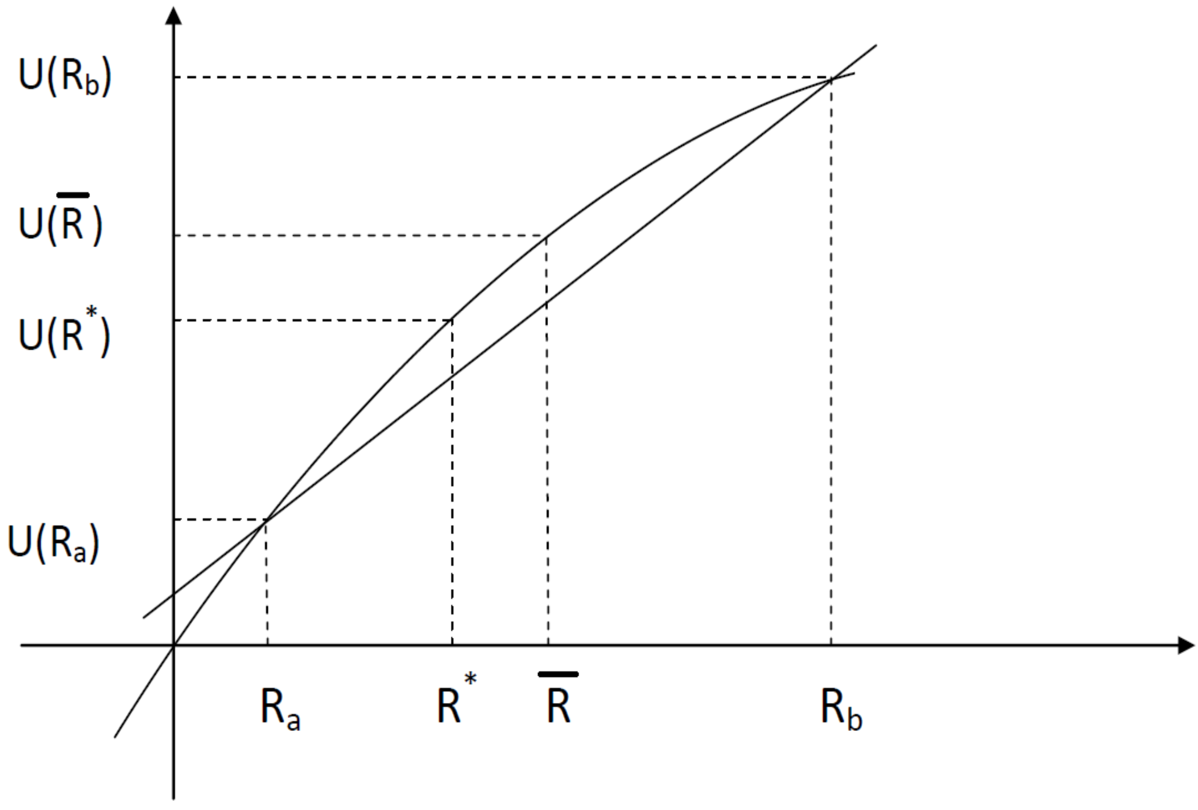
Remarque :

- U est C^∞
- U est croissante $\Leftrightarrow U' > 0$
- U est localement non saturée càd que l'on préfere toujours avoir plus.

Dans la vie il y a trois type de reactions des personnes face aux risques :

- Les personnes risque averse :
  Leur fonction d'utilité est concave :

$$\left\{ \begin{array}{c} U(R^\star) = \frac{U(R_a)+U(R_b)}{2} \\ \overline{R} = \frac{R_a+R_b}{2} \end{array} \right\}$$



Tel que $E[U(\overline{X})] < U(E[\overline{X}])$

- Les personnes indifférentes au risque :

Leur fonction d'utilité est une droite, cela tient au faite que qu'il ne joue pas plus qu'il gagne.

– Les personnes qui aime le risque :
  Leur fonction d'utilité est convexe, càd qu'ils sont pret a miser de l'argent sur la loterie $\mathcal{L}(\frac{1}{2}, 1000, -1000)$ alors meme que l'espérance des gains est nul pour cette loterie.

L'homo economicus étant toujours risque averse, nous utiliserons des fonctions d'utilités concaves.

1.4 Calcul de la prime de risque

On appelle prime de risque $\pi = \omega - \omega^\star$
Soit u la fonction d'utilité concave quelconque.

Posons $R_a = \omega - s$, $R_b = \omega + s$, $\overline{R} = \omega$ et $R^\star = \omega^\star$ où s est un réel positif quelconque.

Or $\omega^\star \sim \mathcal{L}(\frac{1}{2}, \omega + s, \omega - s)$

Soit $\tilde{S}$ la variable aléatoire binomial :
$\tilde{S} = \begin{cases} \tilde{S} = -s \text{ avec la probabilité } p = \frac{1}{2} \\ \tilde{S} = +s \text{ avec la probabilité } p = \frac{1}{2} \end{cases}$

$E[\tilde{S}] = 0$
$Var(\tilde{S}) = \sigma^2$

On cherche à calculer la valeur de π.
$u(\omega^\star) = u(\omega - \pi) = u(\omega) - \pi u'(\omega) + \epsilon(\omega)$
Comme $\omega^\star$ est l'équivalent certain de $\mathcal{L}(\frac{1}{2}, \omega + s, \omega s)$ c'est équivalent à dire que :
$U(\omega^\star) = u(\omega + \tilde{S}) + \tilde{S}u'(\omega) + \frac{1}{2}\tilde{S}^2 u''(\omega) + \epsilon(s)$
$E[u(\omega^\star)] = u(\omega^\star)$
$E[u(\omega^\star)] = u(\omega) + u'(\omega) \cdot E(\tilde{S}) + \frac{1}{2}E(\tilde{S}^2) \cdot u''(\omega) = u(\omega) + \frac{1}{2}\sigma^2 u''(\omega)$
Comme $u(\omega^\star) = u(\omega) - \pi u'(\omega) = u(\omega) + \frac{1}{2}\sigma^2 u''(\omega)$

$$\boxed{\pi = -\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{u''(\omega)}{u'(\omega)}}$$

On remarque que $\pi > 0$.

1.5 Aversion Absolue pour le Risque(AAR ou ARA en anglais)

$$AAR = -\frac{u''(\omega)}{u'(\omega)}$$

Une bonne fonction d'utilité est une fonction qui a une AAR décroissante par rapport à ω.

1.6 Aversion Relative pour le Risque(ARR ou RRA en anglais)

$$AAR = -\omega\frac{u''(\omega)}{u'(\omega)}$$

Une bonne fonction d'utilité est une fonction qui a une ARR constante par rapport à ω.

1.7 Condition d'INADA

Toute bonne fonction d'utilité vérifie les conditions d'INADA.

- $\lim_{\omega \to 0} u'(\omega) = \infty$
- $\lim_{\omega \to \infty} u'(\omega) = 0$

2 Exemple de fonction d'utilité :

2.1 Fonction logarithme

Soit la fonction $u(\omega) = \ln(\omega)$, une fonction d'utilité courante.

$$u'(\omega) = \frac{1}{\omega}$$
$$u''(\omega) = -\frac{1}{\omega^2}$$
$$AAR = \frac{1}{\omega}$$
$$ARR = 1$$

Les conditions d'INADA sont vérifiées.

2.2 Fonction puissance

Soit la fonction $u(\omega) = \frac{\omega^a}{a}$ où $a \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[$.

$$u'(\omega) = \omega^{a-1}$$
$$u''(\omega) = (a-1) \cdot \omega^{a-2}$$
$$AAR = \frac{1-a}{\omega}$$
$$ARR = 1 - a$$

Les conditions d'INADA sont vérifiées.

2.3 Difficulté de construction d'une fonction d'utilité

Nous avons implicitement fait des hypothèses qui s'avérent fausses dans certain cas. En particulier le cas de l'indépendance du choix entre deux loteries. Ce paradoxe est parfaitement illustré par le paradoxe d'Allais.

Si on a le choix entre deux loteries :
(A) $\mathcal{L}(1, 320k€, 0€) \mid \mathcal{L}(0.8, 450k€, 0€)$ (B)

Dans une classe, 90% des étudiants préfèrent la loterie A, qui procure un gain certain, à la loterie B, bien que l'espérance de la loterie B soit égale à $360k€$.

Dans un second temps, lorsque l'on demande de choisir entre les loteries C et D telles que :
(C) $\mathcal{L}(\frac{1}{4}, 320k€, 0€) \mid \mathcal{L}(\frac{1}{5}, 450k€, 0€)$ (D)

Dans la même classe, 85% des étudiants préfèrent la loterie D à la loterie C, parce que D procure en cas un gain significativement plus important que C pour une probabilité de non-gain à peine plus forte.

Pourtant, on voit que :
(C) $= \mathcal{L}(\frac{1}{4}, (A), 0)$
(D) $= \mathcal{L}(\frac{1}{4}, (B), 0)$

La simultanéité de ces deux choix fait voler en éclat l'axiome d'indépendance. Car selon cet axiome, si A est préféré à B, alors C devrait être préféré à D, ce qui n'est pas le cas en pratique.

En résumé le paradoxe d'Allais se résume à :
On devrait avoir $A \succ B \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{1}{4}A \succ D = \frac{1}{4}B$
Dans la réailté on se retrouve avec : $A \succ B \quad \not\Leftrightarrow \quad C = \frac{1}{4}A \succ D = \frac{1}{4}B$