Préambule

Durée de l'examen 2 heures. Seuls les documents papiers et une calculette sont autorisés.

Exercice 1

Q1) L'analyste d'un fond d'investissement pense que l'entreprise ABC qui a distribué 20 € de dividende cette année aura une augmentation de ses dividendes de 3% les deux prochaines anné[es]. Cette croissance diminura de 1% par an à partir de la 3ème année ainsi les dividendes seront stable[s à] partir de la 5ème année . Quel est le prix que vous serez prêt à payer pour l'action d'ABC, sachant qu[e] le taux d'actualisation d'ABC est de 6% ?

Q2) Le directeur financier de la société ABC hésite entre un investissement I_0 de 1000 K€ qui a une $E(VAN\ I_0) = 690$ K€ et un $\sigma(VAN\ I_0) = 290$ K€ et trois investissements réalisables en parallèle de

- $I_1 = 400$ K€ $E(VAN\ I_1) = 300$ K€ $\sigma(VAN\ I_1) = 180$ K€
- $I_2 = 400$ K€ $E(VAN\ I_2) = 270$ K€ $\sigma(VAN\ I_2) = 130$ K€
- $I_3 = 400$ K€ $E(VAN\ I_3) = 120$ K€ $\sigma(VAN\ I_3) = 50$ K€

Sachant que les 3 investissements sont indépendants doit-il choisir I_0 ou $I_1+I_2+I_3$?

Exercice 2

Soit un marché mono-période avec 2 actifs risqués $S_1^0 = 100$ et $S_2^0 = 100$ et 3 états de la nature [...] ω_2 et ω_3.

	ω_1	ω_2	ω_3
S_1	120	70	140
S_2	60	140	100

Q1) Calculez la matrice nommée Z de l'économie

Q2) Donnez l'intervalle de β_3 pour lequel il y a AOA sur ce marché.

Q3) Quel intervalle déduisez-vous pour R ? de l'actif sans risque

Si R = 1 appartient à cet intervalle, prenez le comme la valeur de R par la suite.

Q4) Calculez le prix du call sur S_1 avec un K = 100 et trouvez le portefeuille de couverture pour ce c[all]

Q5) Déduisez par la formule de la parité put-call le prix du put sur le même actif avec K = 100.

Exercice 3

$m : 20€$ $\qquad r_{ABC} = 6\%$

$m+1 : +3\%$

$m+2 : +3\%$

$m+3 : +2\%$

$m+4 : +1\%$

$m+5 : 0\%$

$$P = \frac{20 \times 1{,}03}{1{,}06} + \frac{20 \times (1{,}03)^2}{(1{,}06)^2} + \frac{20 \times (1{,}03)^2 \times (1{,}02)}{(1{,}06)^3} + \frac{20 \times (1{,}03)^2 \times 1{,}02 \times 1{,}01}{(1{,}06)^4} + 20 \times (1{,}03)^2 \times 1{,}02 \times 1{,}01 \times \sum_{i=5}^{\infty} \frac{1}{(1{,}06)^i}$$

$$P = 19{,}43 + 18{,}88 + 18{,}17 + 17{,}31 + 21{,}86 \times \sum_{i=5}^{m} \frac{1}{(1{,}06)^i}$$

$$= 73{,}79 + 21{,}86 \sum_{i=5}^{\infty} \left(\frac{1}{1{,}06}\right)^i$$

$$= 73{,}79 + 21{,}86 \left(17{,}66 - \frac{1}{1{,}06} - \left(\frac{1}{1{,}06}\right)^2 - \left(\frac{1}{1{,}06}\right)^3 - \left(\frac{1}{1{,}06}\right)^4\right)$$

$$= 384{,}24\ €$$

Chain d'investissement :

$I_0 = 1000\ K€ \quad E(Van\ I_0) = 690\ K€ \quad \sigma(Van\ I_0) = 290\ K€$

$I_1 = 400\ K€ \quad E = 300 \quad \sigma = 180$

$I_2 = 400\ K€ \quad E = 270 \quad \sigma = 130\ K€$

$I_3 = 400 \quad E = 120 \quad \sigma = 50$

$I_1 + I_2 + I_3 = 1200\ K€, \quad E = 690\ K€, \quad \sigma = 360\ K€$

$1000\ K€, \quad E = \frac{690}{1{,}2} = 575\ K€, \quad \sigma = \frac{360}{1{,}2} = 300\ K€$

Il vaut mieux choisir I_0 en effet

$E(I_0) = 690 > E(I_c) = \frac{690}{1{,}2} = 575\ K€$

$\sigma(I_0) = 290 \leq \sigma(I_s) = \frac{360}{1{,}2} = 300\ K€$

Exo 2

	w_1	w_2	w_3
S_1	120	70	140
S_2	60	140	100

$S_1^0 = 100$

$S_2^0 = 100$

Q_1) : $Z = Y \cdot D^{-1} = \begin{pmatrix} 120 & 60 \\ 70 & 140 \\ 140 & 100 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{100} & 0 \\ 0 & \frac{1}{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}7 & 1{,}4 \\ 1{,}4 & 1 \end{pmatrix}$

Q_2) $Z^T \mathcal{B} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 12\mathcal{B}_1 + 7\mathcal{B}_2 + 14\mathcal{B}_3 = 10 \\ 6\mathcal{B}_1 + 14\mathcal{B}_2 + 10\mathcal{B}_3 = 10 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 12\mathcal{B}_1 + 7\mathcal{B}_2 + 14\mathcal{B}_3 = 10 \\ -18\mathcal{B}_1 - 18\mathcal{B}_3 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 21\mathcal{B}_2 + 6\mathcal{B}_3 = 10 \\ 18\mathcal{B}_1 + 18\mathcal{B}_3 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{B}_2 = \frac{10}{21} - \frac{2}{7}\mathcal{B}_3 \\ \mathcal{B}_1 = \frac{10}{18} - \mathcal{B}_3 \end{cases}$

$z_1, z_2, z_3 > 0$

$$\begin{cases} \frac{10}{18} - z_3 > 0 \\ \frac{10}{21} - \frac{2}{7} z_3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -z_3 > -\frac{10}{18} \\ -\frac{2}{7} z_3 > -\frac{10}{21} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_3 < \frac{10}{18} = \frac{5}{9} \\ z_3 < \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\boxed{0 < z_3 < \frac{5}{9}}$$

Q3) $z_1 + z_2 + z_3 = \frac{1}{R}$

$\frac{10}{18} - z_3 + \frac{10}{21} - \frac{2}{7} z_3 + z_3 = \frac{1}{R}$

↳ $z_3 = 0 \Rightarrow \frac{10}{18} + \frac{10}{21} = \frac{1}{R}$

$\Rightarrow \frac{63}{65} = 0,97$

$z_3 = \frac{5}{9}$;

$\Rightarrow \frac{10}{18} - \cancel{\frac{5}{9}} + \frac{10}{21} - \frac{2}{7} \times \frac{5}{9} + \cancel{\frac{5}{9}} = \frac{1}{R}$

$\Rightarrow R = 1,14$

$R = [0,97 , 1,14]$

Q4) $K = 100$

$$S_1 \begin{pmatrix} 120 \\ 70 \\ 140 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} w_1 = 20 \\ w_2 = 0 \\ w_3 = 40 \end{matrix}$$

$c = z_1 \times 20 + z_3 \times 40$

$R = 1$

$\Rightarrow z_1 + z_2 + z_3 = 1$

$\Rightarrow \frac{10}{18} - \cancel{z_3} + \frac{10}{21} - \frac{2}{7} z_3 + \cancel{z_3} = 1$

$\Rightarrow z_3 = -\frac{7}{2}\left(1 - \frac{10}{18} - \frac{10}{21}\right) = \frac{1}{9}$

$z_1 = \frac{10}{18} - z_3 = \frac{10}{18} - \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$

$z_2 = \frac{10}{21} - \frac{2}{7} z_3 = \frac{10}{21} - \frac{2}{7} \times \frac{1}{9} = \frac{10}{21} - \frac{2}{63} = \frac{4}{9}$

$c = \frac{1}{9} \times 20 + \frac{1}{9} \times 40 = \frac{40}{3}$

~~Q4)~~ Portefeuille de couverture :

$Z\theta_1 = Z\theta_2$

$w_1 : \theta_0 \times 1 + \theta_1 \times 120 + \theta_2 \times 60 = 20$

$w_2 : \theta_0 \times 1 + \theta_1 \times 70 + \theta_2 \times 140 = 0$

$w_3 : \theta_0 \times 1 + \theta_1 \times 140 + \theta_2 \times 100 = 40$

$$\boxed{\begin{array}{l} \theta_0 = -70 \\ \theta_1 = \frac{1}{6} \\ \theta_2 = \frac{4}{6} \end{array}}$$

$\frac{100}{6} + \frac{400}{6} - 70 = \frac{40}{3} = c$

Q5) $P + S_0 = c + \frac{K}{1+R}$

$P = \left(\frac{40}{3} + \frac{100}{1}\right) - 100 = \frac{40}{3}$

Exercice n°3 :

$\begin{cases} p(w_1) = 0,3 \\ p(w_2) = 0,5 \\ p(w_3) = 0,2 \end{cases}$ S_1 et S_2

~~$Var[X] = x0,3 \times (20)^2 + y0,5(30)^2 + 0,2(40)^2$~~ ~~$(1-x-y)$~~

~~$= x120 + y \times 450 + (1-x-y) \times 320$~~

$E[S_1] = 0,3 \times 20 + 0,5 \times -30 + 0,2 \times 40 = 14 - 15 = -1\%$

$E[S_2] = -0,3 \times 40 + 40 \times 0,5 + 0 = 20 - 12 = 8\%$

$V[S_1] = 0,3 \times [0,20 + 0,01]^2 + 0,5[0,3 + 0,01]^2 + 0,2[0,4 + 0,01]^2$

$= 0,01323 + 0,04805 + 0,03362$

$= 0,0949$

$V[S_2] = -0,3[0,40 - 0,08]^2 + 0,5[0,4 - 0,08]^2$

$= -0,03072 + 0,0512 = 0,02048$

$V[P] = x^2 \times 0,0949 + (1-x)^2 \, 0,02048 + 2 \times x \times (1-x) \times Cov(S_1, S_2)$