TD 1 (16-20/01/12)

Exercice 1. Démos du cours

1. *Montrer que la matrice* $V = \frac{1}{n}{}^tYY$ *vérifie bien :* $\begin{cases} v_{jk} = s_{jk} = \textit{covariance de } X^j \textit{ et } X^k \\ v_{jj} = s_j^2 = \textit{variance de } X^j \end{cases}$

2. *Vérifier l'égalité :* $\dfrac{1}{n}\left\langle \vec{OY_i}; \vec{OY_j} \right\rangle = s_{ij}$ *covariance de* X_i *et*X_j.

3. *Etablir les égalités :*

$$\sum_{i,j} d^2(Y_i, Y_j) = \sum_{i,j} \parallel \vec{Y_iY_j} \parallel^2 = \sum_{i,j} \parallel \vec{OY_i} \parallel^2 + \parallel \vec{OY_j} \parallel^2 - 2\left\langle \vec{OY_i}; \vec{OY_j} \right\rangle = 2n \sum_j \parallel \vec{OY_j} \parallel^2$$

4. *Montrer, à l'aide de Pythagore, l'équivalence des deux problèmes :*
   - $\min J_H = \dfrac{1}{n}\sum_j \parallel \vec{OY_j} - \vec{OP_HY_j} \parallel^2$
   - $\max I_H = \dfrac{1}{n}\sum_j \parallel \vec{OP_HY_j} \parallel^2$

5. *Résoudre par la méthode de votre choix le problème :* $\max I_u = \dfrac{1}{n}\sum_j \left\langle \vec{OY_j}; \vec{u} \right\rangle^2$

   sous la contrainte $\parallel \vec{u} \parallel^2 = 1$

6. *Démontrer les points 2 et 3 du théorème 1.4.2.*

7. *Etablir l'égalité* $cov(C^l, C^k) = \begin{cases} \lambda_l & si \quad l = k \\ 0 & si \quad l \neq k \end{cases}$

   et en déduire $r(C^l, Y^j) = \dfrac{cov(C^l, Y^j)}{\sqrt{var(C^l)var(Y^j)}} = \sqrt{\lambda_l}\dfrac{u_l^j}{s_j}$.

Exercice 2. - *Utiliser le logiciel* ***R*** *pour appliquer une* ***ACP*** *au fichier de données appelé* ***credit****.*

1. *Indiquer les variables qui contribuent positivement ou négativement à chaque composante principale ?*
2. *Même question pour les contributions des individus.*
3. *Au vu des valeurs propres, le choix de deux composantes principales est-il judicieux ou faut-il prendre d'autres composantes ?*