

Décidabilité

4 février 2011

Eléments de corrigé de l'examen

1 Machine de Turing

Exercice 1.1.1 Le langage accepté par cette machine est l'ensemble des chaînes se terminant par 1. Ce langage est régulier, il peut être décidé par un automate déterministe.

Exercice 1.1.2 L'alphabet d'entrée de cette machine étant :

$\{1,2\}$ pour Σ , $\{3,4,5\}$ pour $\{q_0, q_1, q_s\}$ $\{6,7,8,9,10,11,12\}$ pour les symboles spéciaux.

Le contenu de la bande : la description de M (en binaire) : cardinalité de Q , cardinalité de Σ les transitions, etc :

3 2 (3,1,3,1,R) (3,2,4,2,R), etc ..

Exercice 1.2 Nous ajoutons à Q un état q'_j . Et nous ajoutons les transmissions suivantes : $\forall(x) \in \Sigma, \delta(q'_j, x) = (q_j, x, L)$. Il suffit de réécrire n'importe quelle transition contenant S en deux transitions : la première est une transition en lecture qui déplace la tête de lecture à droite suivie d'une deuxième transition qui déplace la tête de lecture à gauche :

$\delta(q_i, a) = (q_j, b, S) : \delta(q_i, a) = (q'_j, b, R)$ suivie de $\delta(q'_j, x) = (q_j, x, L)$,

2 Décidabilité

Exercice 2.1 En ce qui concerne l'intersection des deux langages : nous construisons la machine de Turing M qui simule en parallèle le fonctionnement de M_{L_1} (la machine qui décide le langage L_1) et de M_{L_2} (la machine qui décide le langage L_2). Si les deux machines acceptent le mot d'entrée alors le mot est accepté Si l'une des deux machines se met dans un état non accepteur alors le mot est rejeté.

En ce qui concerne l'union : nous construisons également une machine de Turing qui simule en parallèle le fonctionnement des deux machines M_{L_1} et M_{L_2} . Si l'une des machines accepte le mot d'entrée alors le mot est accepté. Si les deux machines rejettent le mot alors il est rejeté.

Exercice 2.2 Il suffit de construire une machine de Turing qui teste si le mot d'entrée est l'entier x . Si oui elle se met dans un état accepteur, sinon elle rejette le mot d'entrée.

Exercice 2.3 Selon l'exercice 2.1 sur l'union des langages décidés, nous arrivons à démontrer que l'appartenance d'un entier à un ensemble fini d'entiers est un problème décidable.

3 Complexité

Exercice 3.1 Il existe une transformation polynomiale à partir du problème du circuit hamiltonien. Le problème de circuit hamiltonien peut se transformer facilement à un problème de CPL, en considérant $\text{card}(V)=J$, et en prenant le chemin entièrement sans le dernier arc qui ferme le circuit. Cette transformation préserve la nature positive des instances.

Exercice 3.2

- Remplacer X_1 par 1 dans F : $F_1 = F(1, X_2, \dots, X_n)$.
- Si $A(F_1)$ alors on choisit $b_1 = 1$
- sinon $b_1 = 0$ et $F_1 = F(0, X_2, \dots, X_n)$
- On répète l'opération à partir de F_1 pour tester F_2 et ainsi de suite pour déterminer les n valeurs. On en déduit donc que la détermination des valeurs satisfaisant F .

On en déduit donc que la détermination des valeurs satisfaisant F n'est pas plus difficile que de savoir si F est satisfiable.