Département Systèmes Informatiques Formels & Intrelligents - Cycle Ingénieur : Deuxième Année

---

Intelligence Artificielle T.D. N^o 1

12 février 2008

Recherche Aveugle et guidée dans un espace d'états

1 Arbre de recherche

Soit A un arbre de recherche d'un but dans un espace d'états. Nous supposons que le but se trouve à un certain niveau de l'arbre donné par d, nous supposons aussi que $max(card(T(E_j))) = b \; \forall E_j \in S$.

Exercice 1 Donner le nombre de noeuds visités par l'algorithme de recherche en profondeur d'abord dans le meilleur de cas et dans le pire de cas. Quel sera l'espace de recherche nécessaire pour explorer cet arbre jusqu'à ce que l'on trouve la solution.

Corrigé 1 Dans le meilleur de cas 1+d.
Dans le pire de cas $b^0 + b^1 + .. + b^d = \frac{b^{d+1}-1}{b-1}$

Exercice 2 Répéter la même question dans le cas d'une recherche en largeur d'abord.

Corrigé 2 Dans le meilleur de cas $b^0 + b^1 + .. + b^{d-1} + 1 = \frac{b^d-1}{b-1} - 1$

Dans le pire de cas $b^0 + b^1 + .. + b^d = \frac{b^{d+1}-1}{b-1}$

1.1 Application : le taquin

Soit un taquin contenant trois cases contenant 1,2, 3 et une case vide.

Exercice 3 Modéliser les états, les actions et la fonction de transition.

Corrigé 3 Un état est modélisé par la liste : $[HG, HD, BG, BD]$ où HG : la position haut gauche, BD : la position bas droite,etc. Une action est le mouvement de la case blanche notée bl. $A \in h, b, g, d$

$$
\begin{aligned}
T([X, Y, Z, bl]) &= \{(h, [X, bl, Z, Y]), (g, [X, Y, bl, Z])\} \\
T([X, Y, bl, Z]) &= \{(h, [bl, Y, X, Z]), (d, [X, Y, Z, bl])\} \\
T([X, bl, Y, Z]) &= \{(b, [X, Z, Y, bl]), (g, [bl, X, Y, Z])\} \\
T([bl, X, Y, Z]) &= \{(b, [Y, X, bl, Z]), (d, [X, bl, Y, Z])\}
\end{aligned}
$$

Exercice 4 Fixer un état initial et un but et donner la solution.

$$E_0 = [1, bl, 2, 3]$$

Corrigé 4

$$
\begin{aligned}
E_0 &= [1, bl, 2, 3] \\
F_0 &= [2, 1, 3, bl] \\
sol &= \{g, b, d\}
\end{aligned}
$$

Exercice 5 Simuler la recherche aveugle du but en utilisant la recherche en profondeur d'abord.

Corrigé 5 $[1, bl, 2, 3]$,g,$[bl, 1, 2, 3]$, (l'action d n'est pas possible car elle ramène à un état visité, donc :
$[1, bl, 2, 3]$,g,$[bl, 1, 2, 3]$,b,$[2, 1, bl, 3]$,d,$[2, 1, 3, bl]$

Exercice 6 Simuler la recherche aveugle du but en utilisant la recherche en largeur d'abord, quel est le coût moyen d'une telle recherche.

Corrigé 6 On simule le contenu de la file d'attente :
$[1, bl, 2, 3]$,$[bl, 1, 2, 3]$,$[1, 2, 3, bl]$;
$[bl, 1, 2, 3]$,$[1, 2, 3, bl]$, $[1, bl, 2, 3]$,$[2, 1, bl, 3]$;
$[1, 2, 3, bl]$, $[1, bl, 2, 3]$,$[2, 1, bl, 3]$,$[1, 2, bl, 3]$,$[1, bl, 3, 2]$;
$[1, bl, 2, 3]$,$[2, 1, bl, 3]$,$[1, 2, bl, 3]$,$[1, bl, 3, 2]$,$[bl, 1, 2, 3]$,$[1, 3, 2, bl]$;
$[2, 1, bl, 3]$,$[1, 2, bl, 3]$,$[1, bl, 3, 2]$,$[bl, 1, 2, 3]$,$[1, 3, 2, bl]$,$[2, 1, 3, bl]$,$[bl, 1, 2, 3]$;

Et ainsi de suite .. on trouvera la solution après 5 itérations de la la file ; la tête sera : $[2, 1, 3, bl]$

2 Application de A* : le taquin

Soit le taquin donné au verso, avec l'état initial et le but.

Exercice 7 Soit l'heuristique h1 qui associe à chaque état le nombre de cases pleines mal placées. Démontrer que cette heuristique est minorante.

Corrigé 7 Il faut démontrer qu'elle est monotone et coïncidente. Il est évident que h1 est coincidente car h1(F)=0 (aucune case est mal placée dans l'état final. Maintenant soit E_i un état et E_j un état successeur. On suppose que $k(E_i, E_j) = 1$ $h(E_i, E_j)$ vaut soit 1 soit -1 et donc la propriété de la monotonie est vérifiée.

Exercice 8 En supposant que le coût de n'importe quelle action soit égale à 1. Donner l'arbre de recherche obtenu par l'algorithme A*. Quel est le coût temporel de l'exploration.

Corrigé 8

$$Actif = \{(e_0 = [1, bl, 2, 3], g = 0, h1 = 3)\}$$

1 : $Inactif = \{(e_0 = [1, bl, 2, 3], g = 0, h1 = 3)\}$, Actif={([1,3,2,bl],g=1,h=3),([bl,1,2,3],g=1,h=3)}

2 : $Inactif = \{(e_0 = [1, bl, 2, 3], g = 0, h1 = 3), ([1, 3, 2, bl], g = 1, h = 3)\}$,$Actif = \{([bl, 1, 2, 3], g = 1, h = 3), ([1, 3, bl, 2], g = 2, h = 3)\}$

3 : $Inactif = Inactif \cup ([bl, 1, 2, 3], g = 1, h = 3)\}$, $Actif = \{((([1, 3, bl, 2], g = 2, h = 3), ([2, 1, bl, 3], g = 2, h = 3)\}$

4 :$Inactif = Inactif \cup ([1, 3, bl, 2], g = 2, h = 3)\}$,$Actif = \{((([2, 1, bl, 3], g = 2, h = 3), ([bl, 3, 1, 2], g = 3, h = 3)\}$

5 : $Inactif = Inactif \cup ([2,1,bl,3], g = 2, h = 3)\}$, $Actif = \{((([bl,3,1,2], g = 3, h = 3), ([2,1,3,bl], g = 3, h = 3)\}$

6 : $Inactif = Inactif \cup (([bl,3,1,2], g = 3, h = 3)\}$,$Actif = \{(([2,1,3,bl], g = 3, h = 3), ([3,bl,1,2], g = 4, h = 2)\}$

7 : $Inactif = Inactif \cup (([3,bl,1,2], g = 4, h = 2)\}$,$Actif = \{(([2,1,3,bl], g = 3, h = 3), ([3,2,1,bl], g = 5, h = 1)\}$

8 : $Inactif = Inactif \cup (([3,2,1,bl], g = 5, h = 1)\}$,$Actif = \{(([3,2,1,bl], g = 5, h = 1), ([3,2,bl,1], g = 6, h = 0)\}$

Exercice 9 Trouver une heuristique minorante h2 plus informée que h1.

Corrigé 9 h2 est la somme des distances des cases de l'état par rapport à l'état but. Pour une case donné la distance par rapport à la case d'origine appartient à l'ensemble $\{0, 1, 3\}$.

Par conséquent, pour chaque état e $h_2(e) >= h_1(e)$.

h2 est minorante, la démonstration est presque la même que h1.

Exercice 10 Donner l'arbre de recherche obtenu par l'algorithme A* en utilisant h2. Quel est le coût temporel de l'exploration.

Corrigé 10

$$Actif = \{(e_0 = [1, bl, 2, 3], g = 0, h2 = 6)\}$$

1 : $Inactif = \{(e_0 = [1, bl, 2, 3], g = 0, h1 = 3)\}$, Actif={([1,3,2,bl],g=1,h=5),([bl,1,2,3],g=1,h=5)}

2 : $Inactif = \{(e_0 = [1, bl, 2, 3], g = 0, h1 = 3), ([1,3,2,bl], g = 1, h = 3)\}$,$Actif = \{(([bl,1,2,3], g = 1, h = 5), ([1,3,bl,2], g = 2, h = 4)\}$

3 :$Inactif = Inactif \cup ([1,3,bl,2], g = 2, h = 4)\}$,$Actif = \{(([bl,1,2,3], g = 1, h = 5), ([bl,3,1,2], g = 3, h = 3)\}$

4 : $Inactif = Inactif \cup (([bl,3,1,2], g = 3, h = 3)\}$,$Actif = \{(([bl,1,2,3], g = 1, h = 5), ([3,bl,1,2], g = 4, h = 2)\}$

5 : $Inactif = Inactif \cup (([3,bl,1,2], g = 4, h = 2)\}$,$Actif = \{(([2,1,3,bl], g = 3, h = 3), ([3,2,1,bl], g = 5, h = 1)\}$

6 : $Inactif = Inactif \cup (([3,2,1,bl], g = 5, h = 1)\}$,$Actif = \{(([3,2,1,bl], g = 5, h = 1), ([3,2,bl,1], g = 6, h = 0)\}$

3 Le problème du loup, de la chèvre et du chou

Un berger se trouve sur la rive gauche d'une rivière avec une chèvre, un chou, un loup. Il a un bateau. Le problème est le suivant : le berger doit utiliser le bateau pour transporter la chèvre, le loup et le chou sur la rive droite. Le bateau ne peut transporter qu'un seul élément à la fois (avec le berger). Le berger ne peut pas laisser le loup et la chèvre sur la même rive tous seuls (même chose pour la chèvre et le chou).

Exercice 11 Modéliser ce problème.

Exercice 12 En utilisant la modélisation précédente, donner une solution sous forme d'une séquence d'actions. Donner une borne supérieure du coût temporel de l'exploration en largeur.

Exercice 13 En supposant que le coût du transport d'un élément en bateau d'une rive vers l'autre rive est égale à : $1+nb$, nb étant le nombre d'éléments transportés, trouver une heuristique minorante qui permettrait de guider la recherche en largeur.