PROJET DE PÔLE 2009-2010
-
Projet de Mathématiques GM

BELGHAZI Souad
MOMBRUN Morgane
MARZOUK Anisse
ZOUITEN Neoufel

Sujet 10

date : 16 décembre 2009

Table des matières

1 Introduction

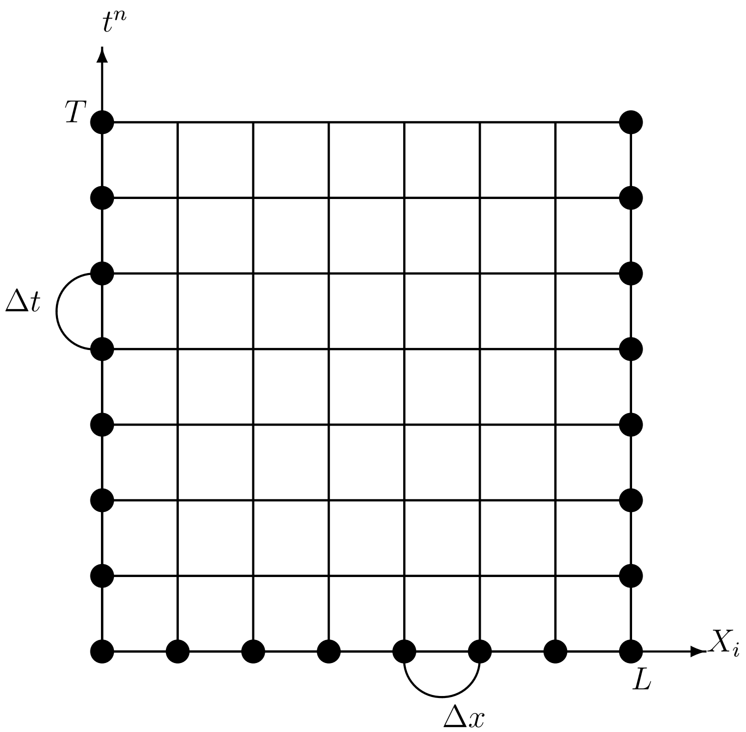
Pour ce livrable n°2, nous devons résoudre numériquement une équation parabolique. L'objectif est d'étudier la solution du problème aux limites pour l'équation suivante :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 2u_x + 2u + \exp^x * x * t \text{ , } x \in]0,1[, \text{ t>0 ;} \\ \text{u(x,0)= 0 ;} \\ \text{u(0,t)=0 ; u(1,t)=1.} \end{cases}$$

La résolution se fera grâce à la méthode des différences finies de Crank-Nicolson ainsi qu'à l'aide de l'algorithme de Thomas.

2 Résolution

2.1 Grille de pas Δx



Les points affichés sur notre grille sont les points connus grâce aux conditions initiales.

2.2 Discrétisation des conditions aux limites et des conditions initiales

Nous devons ici discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales qui sont :

$$\begin{cases} \text{u(x,0)= 0 ;} \\ \text{u(0,t)=0 ; u(1,t)=1.} \end{cases}$$

Les conditions aux limites et les conditions initiales sont des constantes.

On peut donc écrire que :

$$U_o^{n+1} = 0$$

$$U_{N+1}^{n+1} = 1$$

$$U_n^0 = 0$$

2.3 Discrétisation à l'aide de la méthode de Crank-Nicolson

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 2u_x + 2u + \exp^x * x * t \ , \ x \in]0,1[, \text{ t>0 ;} \\ \text{u(x,0)= 0 ;} \\ \text{u(0,t)=0 ; u(1,t)=1.} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial u}{\partial x} + 2u + \exp^x * x * t \ , \ x \in]0,1[, \text{ t>0 ;} \\ \text{u(x,0)= 0 ;} \\ \text{u(0,t)=0 ; u(1,t)=1.} \end{cases}$$

On applique maintenant la méthode d'Euler explicite :

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = \frac{U_{i+1}^n + U_{i-1}^n - 2U_i^n}{(\Delta X)^2} - 2\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta X} + 2U_i^n + x_i t^n e^{x_i}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{U_{i+1}^n + U_{i-1}^n - 2U_i^n}{(\Delta X)^2} + \frac{U_{i+1}^{n+1} + U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1}}{(\Delta X)^2}\right] - \frac{2}{2}\left[\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta X} + \frac{U_{i+1}^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{2\Delta X}\right]$$

$$+ \frac{2}{2}\left[U_i^n + U_i^{n+1}\right] + \frac{1}{2}\left[x_i t^n e^{x_i} + x_i t^{n+1} e^{x_i}\right]$$

$$\Longrightarrow$$

$$U_{i-1}^{n+1}\underbrace{\left[\frac{-\Delta t}{2(\Delta X)^2}-\frac{\Delta t}{2\Delta X}\right]}_{\text{B}}+U_i^{n+1}\underbrace{\left[1+\frac{\Delta t}{(\Delta X)^2}-\Delta t\right]}_{\text{D}}+U_{i+1}^{n+1}\underbrace{\left[\frac{-\Delta t}{2(\Delta X)^2}+\frac{\Delta t}{2\Delta X}\right]}_{\text{A}}$$

$$=U_{i-1}^{n}\left[\frac{\Delta t}{2(\Delta X)^2}+\frac{\Delta t}{2\Delta X}\right]+U_i^{n}\left[1-\frac{\Delta t}{(\Delta X)^2}+\Delta t\right]+U_{i+1}^{n}\left[\frac{\Delta t}{2(\Delta X)^2}-\frac{\Delta t}{2\Delta X}\right]+\frac{\Delta t}{2}\left[x_i t^n e^{x_i}+x_i t^{n+1}e^{x_i}\right]$$

On a ainsi :

$$BU_{i-1}^{n+1}+DU_i^{n+1}+AU_{i+1}^{n+1}=K_i^n$$

2.4 Equation aux différences finies obtenues sous forme matricielle

Nous avons obtenu auparavant l'equation suivante :

$$BU_{i-1}^{n+1}+DU_i^{n+1}+AU_{i+1}^{n+1}=K_i^n$$

Donc pour i allant de 1 à N nous avons :

$$i=1\Longrightarrow BU_0^{n+1}+DU_1^{n+1}+AU_2^{n+1}=K_1^n$$

$$i=2\Longrightarrow BU_1^{n+1}+DU_2^{n+1}+AU_3^{n+1}=K_2^n$$

$$i=3\Longrightarrow BU_2^{n+1}+DU_3^{n+1}+AU_4^{n+1}=K_3^n$$

$$\vdots$$

$$i=N\Longrightarrow BU_{N-1}^{n+1}+DU_N^{n+1}+A\underbrace{U_{N+1}^{n+1}}_{1}=K_N^n$$

Or $U_{N+1}^{n+1}=1$, on peut donc écrire que :

$$BU_{N-1}^{n+1}+DU_N^{n+1}=K_N^n-A$$

De plus, on sait d'après les conditions aux limites que $U_0^{n+1}=0$, donc pour $i=1$ nous avons :

$$DU_1^{n+1}+AU_2^{n+1}=K_1^n$$

Le système sous forme matricielle est le suivant :

$$\begin{pmatrix} D & A & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ B & D & A & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & B & D & A & 0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & B & D & A \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \\ \vdots \\ \vdots \\ \\ U_N^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1^n \\ K_2^n \\ \\ \vdots \\ \vdots \\ \\ K_N^n - A \end{pmatrix}$$

2.4.1 Résolution du système d'équation obtenu grâce à l'algorithme de Thomas

$$\begin{cases} dU_1 + aU_2 = C_1 \\ bU_1 + dU_2 + aU_3 = C_2 \\ \vdots \\ bU_{m-1} + dU_m = C_m \end{cases}$$

Prenons maintenant les deux premieres equations. On multiplie la première par b et la seconde par d :

$$\left| \begin{array}{ll} dU_1 + aU_2 = C_1 & \quad * b \\ bU_1 + dU_2 + aU_3 = C_2 & \quad * d \end{array} \right.$$

On soustrait la première équation à la seconde, nous obtenons donc :

$$\frac{d^2U_2}{d} + \frac{adU_3}{d} - \frac{abU_2}{d} = \frac{C_2 d}{d} - \frac{C_1 b}{d}$$

$$dU_2 + aU_3 - \frac{abU_2}{d} = C_2 - \frac{C_1 b}{d}$$

$$\underbrace{(d - \frac{ab}{d}}_{d_2^*})U_2 + aU_3 = \underbrace{C_2 - \frac{C_1 b}{d}}_{C_2^*}$$

Le système devient : $\begin{cases} dU_1 + aU_2 = C_1 & \\ d_2^* U_2 + aU_3 = C_2^* & \quad * b \\ bU_2 + dU_3 + aU_4 = C_3 & \quad * d_2^* \\ \vdots & \\ bU_{m-1} + dU_m = C_m & \end{cases}$

On continue l'opération et cela devient : $\begin{cases} dU_1 + aU_2 = C_1 \\ d_2^* U_2 + aU_3 = C_2^* \\ d_3^* U_3 + aU_3 = C_3^* \\ \vdots \\ d_m^* U_m = C_m^* \end{cases}$

D'où :

$$U_m = \frac{C_m^*}{d_m^*}$$

$$et$$

$$U_{m-1} = \frac{C_{m-1}^* - aU_m}{d_{m-1}^*}$$

For i=2...N
$\begin{cases} d_i^* = d_i - \frac{a}{d_{i-1}^*} b \\ C_i^* = C_i - C_{i-1} \frac{b}{d_{i-1}^*} \end{cases}$

End
Avec $d_1^* = d$ et $C_1^* = C_1$

$$et$$

$$U_m = \frac{C_m^*}{d_m^*}$$

For i=m...1
$\left\{ U_{i-1} = \frac{C_{i-1}^* - aU_i}{d_{i-1}^*} \right.$

End

2.5 Visualisation des solutions

Il est question ici de visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$. On a donc $\Delta t = \frac{1}{4}$, prenons $\Delta x = \frac{1}{4}$ également.

Nous obtenons donc pour A, B et D :

$B = \frac{-\frac{1}{4}}{2(\frac{1}{4})^2} - \frac{\frac{1}{4}}{2\frac{1}{4}} = -\frac{5}{2}$

$D = 1 + \frac{\frac{1}{4}}{(\frac{1}{4})^2} - \frac{1}{4} = \frac{19}{4}$

$A = \frac{-\frac{1}{4}}{2(\frac{1}{4})^2} + \frac{\frac{1}{4}}{2\frac{1}{4}} = -\frac{3}{2}$

On sait que $U_m = U_4 = 1 \qquad d_1^* = d = \frac{19}{4} \qquad$ et $\qquad C_1^* = C_1$

On obtient donc :

$d_2^* = d - \frac{a}{d_1^*}b = d - \frac{a}{d}b = \frac{241}{76}$

$C_2^* = C_2 - C_1\frac{b}{d_1^*}$

$d_3^* = d - \frac{a}{d_2^*}b = -\frac{57}{4}$

$C_3^* = C_3 - C_2\frac{b}{d_2^*}$

$d_4^* = d - \frac{a}{d_3^*}b = \frac{381}{76}$

$C_4^* = C_4 - C_3\frac{b}{d_3^*}$

On en déduit donc U_1, U_2, U_3 :

$U_4 = 1$

$U_3 = \frac{C_3^* - aU_4}{d_3^*} = \frac{C_3 - C_2\frac{b}{d_2^*} - a}{-\frac{57}{4}}$

$U_2 = \frac{C_2^* - aU_3}{d_2^*} = \frac{C_2 - C_1\frac{b}{d_1^*} - a\frac{C_3 - C_2\frac{b}{d_2^*} - a}{-\frac{57}{4}}}{\frac{241}{76}}$

$U_1 = \frac{C_1^* - aU_2}{d_1^*} = \frac{C_1 - a\frac{C_2 - C_1\frac{b}{d_1^*} - a\frac{C_3 - C_2\frac{b}{d_2^*} - a}{-\frac{57}{4}}}{\frac{241}{76}}}{\frac{19}{4}}$