

PROJET DE PÔLE 2009-2010

-

EDP - Différences finies - C++

Livrable n°1

Sujet n°6 : Résolution de problème aux limites  
de Dirichlet pour une équation de chaleur non  
homogène

RAVIER CLEMENT

TRAN THIERRY

PONTAROLLO THIBAUT

date :12novembre 2009

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Etude analytique</b>	<b>3</b>
1.1	Résolution du problème . . . . .	3
1.2	Solution du problème homogène . . . . .	3
1.3	Solution du problème non homogène . . . . .	4
1.3.1	Calcul de $F_n(t)$ . . . . .	4
1.3.2	Calcul de $\alpha_n(t)$ . . . . .	5
1.4	Solution du problème initial . . . . .	5

# 1 Etude analytique

## 1.1 Résolution du problème

Nous sommes en présence d'un problème aux limites de Dirichlet pour une équation de chaleur non homogène :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{-t}x(x-1) & \text{si } x \in ]0, 1[ ; t > 0 \\ u(x, 0) = \sin(\pi x) \\ u(0, t) = 0 ; u(1, t) = 0 \end{cases}$$

Pour résoudre ce problème, nous utilisons le principe de superposition. En effet, nous décomposons la solution recherchée  $u(x, t)$  du problème en somme  $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$  avec  $v(x, t)$  solution du problème homogène suivant :

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} & \text{si } x \in ]0, 1[ ; t > 0 \\ v(x, 0) = \sin(\pi x) \\ v(0, t) = 0 ; v(1, t) = 0 \end{cases}$$

et  $w(x, t)$  solution du problème non homogène à conditions initiales nulles :

$$\begin{cases} w_t = w_{xx} + e^{-t}x(x-1) & \text{si } x \in ]0, 1[ ; t > 0 \\ w(x, 0) = 0 \\ w(0, t) = 0 ; w(1, t) = 0 \end{cases}$$

## 1.2 Solution du problème homogène

Il s'agit de résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} & \text{si } x \in ]0, 1[ ; t > 0 \\ v(x, 0) = \sin(\pi x) \\ v(0, t) = 0 ; v(1, t) = 0 \end{cases}$$

En utilisant les notations du cours, nous avons  $a = 1$  et  $L = 1$ . La condition initiale  $g(x) = \sin(\pi x)$  est une fonction de classe  $C^2[0, 1]$  et vérifie  $g(0) = g(1) = 0$ . D'après le cours, on peut écrire la solution  $v(x, t)$  sous forme de série de Fourier :

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-at \frac{n^2 \pi^2}{L^2}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-tn^2 \pi^2} \sin(n\pi x) \end{aligned}$$

où  $C_n$  sont les coefficients de décomposition en série de Fourier de  $g(x)$  :

$$g(x) = \sin(\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x)$$

Dans ce cas particulier, nous pouvons identifier les coefficients directement, en utilisant l'argument d'unicité de décomposition en série de Fourier. En effet, la fonction  $g(x)$  est une fonction sinus. Donc,

$$C_1 = 1 ; \forall n > 1, C_n = 0$$

Ainsi, la solution de ce problème homogène est :

$$v(x, t) = e^{-t\pi^2} \sin(\pi x)$$

### 1.3 Solution du problème non homogène

Nous recherchons ici la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} w_t = w_{xx} + e^{-t}x(x-1) = w_{xx} + f(x, t) & \text{si } x \in ]0, 1[ ; t > 0 \\ w(x, 0) = 0 \\ w(0, t) = 0 ; w(1, t) = 0 \end{cases}$$

D'après le cours, nous recherchons une solution de la forme :

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) e^{-a\lambda_n t} \sin(\sqrt{\lambda_n} x) \text{ avec } \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$$

Ce qui ici, nous donne :

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) e^{-tn^2 \pi^2} \sin(n\pi x)$$

Les coefficients  $\alpha_n(t)$  sont donnés par la formule suivante :

$$\alpha_n(t) = \int_0^t F_n(\tau) e^{a\lambda_n \tau} d\tau \text{ avec } \forall t > 0, F_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L f(y, t) \sin(\sqrt{\lambda_n} y) dy$$

Ce qui ici, nous donne :

$$\alpha_n(t) = \int_0^t F_n(\tau) e^{n^2 \pi^2 \tau} d\tau \text{ avec } \forall t > 0, F_n(t) = 2 \int_0^1 e^{-t} y(y-1) \sin(n\pi y) dy$$

#### 1.3.1 Calcul de $F_n(t)$

On a :

$$F_n(t) = 2 \int_0^1 e^{-t} y(y-1) \sin(n\pi y) dy$$

Effectuons une intégration par parties de classe  $C^1$ , en posant :

$$\begin{cases} u = y(y-1) \\ v' = \sin(n\pi y) \end{cases}$$

Il vient :

$$F_n(t) = 2e^{-t} \left( [-y(y-1) \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi y)]_0^1 + \frac{1}{n\pi} \int_0^1 (2y-1) \cos(n\pi y) dy \right)$$

or,  $[-y(y-1) \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi y)]_0^1 = 0$ , donc :

$$F_n(t) = \frac{2e^{-t}}{n\pi} \int_0^1 (2y-1) \cos(n\pi y) dy$$

Effectuons une deuxième intégration par parties de classe  $C^1$ , en posant :

$$\begin{cases} u = 2y - 1 \\ v' = \cos(n\pi y) \end{cases}$$

Il vient :

$$F_n(t) = \frac{2e^{-t}}{n\pi} \left( \left[ \frac{2y-1}{n\pi} \sin(n\pi y) \right]_0^1 - \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \sin(n\pi y) dy \right)$$

$$\text{or, } \left[ \frac{2y-1}{n\pi} \sin(n\pi y) \right]_0^1 = 0, \text{ donc : } F_n(t) = -\frac{4e^{-t}}{n^2\pi^2} \int_0^1 \sin(n\pi y) dy \\ = -\frac{4e^{-t}}{n^2\pi^2} \left[ -\frac{1}{n\pi} \cos(n\pi y) \right]_0^1, \text{ d'où :}$$

$$F_n(t) = \frac{4e^{-t}}{n^3\pi^3} ((-1)^n - 1)$$

### 1.3.2 Calcul de $\alpha_n(t)$

On a :

$$\alpha_n(t) = \int_0^t F_n(\tau) e^{n^2\pi^2\tau} d\tau, \text{ soit, d'après ce qui précède :}$$

$$= \int_0^t \frac{4e^{-\tau}}{n^3\pi^3} ((-1)^n - 1) e^{n^2\pi^2\tau} d\tau = \frac{4(-1)^n - 1}{n^3\pi^3} \int_0^t e^{-\tau} e^{n^2\pi^2\tau} d\tau = \frac{4(-1)^n - 1}{n^3\pi^3} \left[ \frac{1}{n^2\pi^2 - 1} e^{\tau(n^2\pi^2 - 1)} \right]_0^t,$$

ce qui nous donne :

$$\alpha_n(t) = \frac{4((-1)^n - 1)}{n^3\pi^3(n^2\pi^2 - 1)} (e^{t(n^2\pi^2 - 1)} - 1)$$

Ainsi, la solution du problème non homogène est :

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4((-1)^n - 1)}{n^3\pi^3(n^2\pi^2 - 1)} (e^{t(n^2\pi^2 - 1)} - 1) e^{-tn^2\pi^2} \sin(n\pi x)$$

## 1.4 Solution du problème initial

La solution du problème initial est la somme des solutions du problème homogène et du problème non homogène  $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$ , soit :

$$u(x, t) = e^{-t\pi^2} \sin(\pi x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4((-1)^n - 1)}{n^3\pi^3(n^2\pi^2 - 1)} (e^{t(n^2\pi^2 - 1)} - 1) e^{-tn^2\pi^2} \sin(n\pi x)$$