# Recherche opérationnelle
TP noté n°1 : Cas des vêtements

Bourdin Marie     Montreau Clément

07/10/11 EISTI

# Question 1 : Modélisation du problème

### 1. Recherche de la fonction à optimiser

Pour résoudre ce problème et trouver le programme de production de la saison 1973-1974, nous devons chercher combien l'entreprise doit fabriquer de chaque vêtement par mois (de septembre à juillet), en respectant les contraintes de travail des ouvrières.

***Variables de décision.***

Nous allons donc poser comme variables de décision $x_{ij}$, avec :

• $1 \leq i \leq 5$ où $i$ représente un type de vêtements : 1 $\rightarrow$ brassières, 2 $\rightarrow$ grenouillères, 3 $\rightarrow$ vestes, 4 $\rightarrow$ capes, 5 $\rightarrow$ bonnets.

• $1 \leq j \leq 11$ où $j$ représente les mois de l'année de production : 1 $\rightarrow$ septembre 1973, 2$\rightarrow$ octobre 1973, ..., 11 $\rightarrow$ juillet 1974.

Par exemple, $x_{23}$ représente la production de grenouillères au mois de novembre.

Pour la suite, nous allons poser $p_i$ le prix de vente HT du produit $i$.

***Calcul des bénéfices (sans les frais de stock).***

On veut maximiser les bénéfices de l'entreprise sur les vêtements. D'après l'énoncé, la marge bénéficiaire des produits est de 15% sur leur prix de vente. Le bénéfice sur un mois donné $j$ est :

$$0.15 \times (p_1.x_{1j} + p_2.x_{2j} + p_3.x_{3j} + p_4.x_{4j} + p_5.x_{5j})$$

$$= 0.15 \sum_{i=1}^{5} p_i.x_{ij}$$

Donc le bénéfice de l'entreprise sur la saison (sans compter les frais de stock) est :

$$0.15 \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{11} p_i.x_{ij}$$

***Calcul des frais de stock.***

Pour un mois donné, on considère que le nombre de produits stockés est égal à la moyenne du nombre de produits stockés en début de mois et du nombre de produits stockés en fin de mois. D'après l'énoncé, les frais de stock mensuels sont de 1% sur les prix de revient de chaque article.

Or le prix de revient d'un article est égal à la différence entre son prix de vente HT et la marge bénéficiaire, c'est-à-dire le prix de revient d'un article $i$ est $p_i - 0.15p_i = 0.85p_i$.

Les stocks sur le mois de septembre sont de (sachant qu'on part d'un stock nul au début de la saison) :

$$\frac{stockDebutSept + stockFinSept}{2} = \frac{0 + x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51}}{2} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_{i1}}{2}$$

Les frais de stocks imputables en septembre sont donc :

$$0,01.0,85.\frac{\sum_{i=1}^{5} p_i.x_{i1}}{2}$$

Début octobre, une partie des stocks est écoulées car une commande passe. Les stocks sur ce mois sont de :

$$\frac{stockDebutOct + stockFinOct - commande}{2} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_{i1} + \sum_{i=1}^{5} x_{i2} - V_{i2}}{2}$$

où $V_{ij}$ représente le nombre (commandes) de produits i vendus **entre septembre et le mois j** (donc $V_{11} = 0$, $V_{12} = 1200$, $V_{13} = 1200$ ...).

*Plus précisément, si $v_{ij}$ est le nombre de produits i vendus au mois j, alors $V_{ij} = \sum_{k=1}^{j} v_{ik}$.*

Les frais de stocks imputables en septembre sont donc :

$$0,01.0,85.\frac{\sum_{i=1}^{5} p_i.x_{i1} - V_{i2}}{2}$$

Les stocks comptabilisés chaque mois dépendent des stocks des mois précédants (c'est le stock précédant + la moitié de la production du mois - les commandes). On pose donc $X_{ij}$ qui représente la production du produit i **entre septembre et le mois j**, on a donc : $X_{ij} = \sum_{k=1}^{j} x_{ik}$.

En continuant de la même manière jusqu'à fin juillet, on peut trouver la formule générale représentant le coût des stocks pour toute l'année en faisant la somme des coûts de chaque mois :

$$0,01.0,85.\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{11}(X_{ij}-V_{ij}).p_i$$

puisque les stocks (production et commandes) sont calculés chaque mois en plus des stocks du mois précédant.

***Fonction d'optimisation.***

On cherche à maximiser les bénéfices de la société en prenant en compte les frais de stock engendrés par la production. En réunissant les 2 formules que nous avons trouvées pour le bénéfice et pour les frais de stocks, voici donc la modélisation de notre problème :

$$MAXf(x) = 0.15\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{11}p_i.x_{ij} - 0,01.0,85.\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{11}(X_{ij}-V_{ij}).p_i$$

$$MAXf(x) = 0.15\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{11}p_i.x_{ij} - 0,0085.\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{11}(X_{ij}-V_{ij}).p_i$$

$$\Rightarrow MAXf(x) = \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{11}p_i.[0,15.x_{ij} - 0,0085.(X_{ij}-V_{ij})]$$

avec :

$X_{ij} = \sum_{k=1}^{j} x_{ik}$ (production du produit i au mois j)

et $V_{ij} = \sum_{k=1}^{j} v_{ik}$ (vente du produit i au mois j)

**2. Recherche des contraintes**

***1ere Contrainte : Le temps de tricotage***

Les deux équipes font tourner les métiers en 2x9h / semaine. Soit au mois, un temps de travail de :

$$22 \times 2 \times 9 + 4 \times 5 = 416h$$

On pose $t_i$ le temps nécessaire de tricotage du produit $i$ en minutes (Par exemple $t_1 = 24$). D'où pour tout j :

$$x_{1j} \times \frac{24}{60} + x_{2j} \times \frac{28}{60} + x_{3j} \times \frac{14}{60} + x_{4j} \times \frac{17}{60} + x_{5j} \times \frac{8}{60} \leq 416$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{60} \sum_{i=1}^{5} x_{ij}.t_i \leq 416$$

***2e contrainte : Le temps de finissage***

N'ayant pas d'informations sur le temps de travail des ouvrières à domicile, on considèrera comme contrainte de finissage uniquement la capacité totale hebdomadaire qui est de 17000 points. La capacité totale mensuelle de l'entreprise est donc $17000 \times 4$ soit 68000 points/mois. Sachant le nombre de points que vaut chaque article ( exemple : Brassière = 4 ), nous avons, pour tout j, la contrainte :

$$4x_{1j} + 5x_{2j} + 1x_{3j} + 2x_{4j} + 3x_{5j} \leq 68000$$

***3e contrainte : Honorer les commandes***

Afin d'assurer le respect des commandes, les stocks doivent être suffisants aux dates prévues.

• Donc, pour la commande du 1er octobre, la contrainte suivante doit être respectée :

$$x_{11} \leq 1200$$
$$x_{21} \leq 700$$
$$x_{31} \leq 850$$
$$x_{41} \leq 600$$
$$x_{51} \leq 400$$

⇒ D'une façon plus générale, pour tout $i$ on a :

$$x_{i1} \leq v_{i1}$$

*Où $v_{ij}$ est la vente du produit i pour le moi j.*

***4e contrainte :***

• De la même manière, pour la commande du mois de janvier, on a :

$$\sum_{j=1}^{4}(x_{1j}) - v_{11} \geq 3000$$

$$\sum_{j=1}^{4}(x_{2j}) - v_{21} \geq 2500$$

$$\sum_{j=1}^{4}(x_{3j}) - v_{31} \geq 2100$$

$$\sum_{j=1}^{4}(x_{4j}) - v_{41} \geq 2000$$

$$\sum_{j=1}^{4}(x_{5j}) - v_{51} \geq 1800$$

⇒ D'une façon plus générale, pour tout $i$ on a :

$$\sum_{j=1}^{4}(x_{ij}) - v_{i1} \leq v_{i2}$$

*Où $v_{ij}$ est la vente du produit i pour le moi j.*

***5e contrainte : La production de la saison 73-74***

Pour la saison 1973-1974, la production de chaque produit ne doit pas dépasser celle de l'année précédente.

D'où :

$$\sum_{j=1}^{11} x_{1j} \leq 13900$$

$$\sum_{j=1}^{11} x_{2j} \leq 8400$$

$$\sum_{j=1}^{11} x_{3j} \leq 9780$$

$$\sum_{j=1}^{11} x_{4j} \leq 7416$$

$$\sum_{j=1}^{11} x_{5j} \leq 3700$$