PELTIER Audran

LANZERAY Alexandre

# Recherche Opérationnelle

## TP N°1

## Fabrication de vêtements pour enfants

18 Septembre 2012

# Question N°1 :

*Dans les cas où l'on n'adopte pas le jersey cette année, quel est le programme de production de la saison 1973-1974 qui maximise le bénéfice de l'entreprise compte tenu des frais financiers imputés aux stocks ? (sachant que l'on ne peut pas dépasser, pour chaque article, les chiffres globaux de production 1972-1973.*

*On prendra une moyenne mensuelle de 22jours de travail plus (éventuellement) 4 samedis de 5 heures.*

## 1. Recherche de la fonction à optimiser

**Identification des Variables de Décision**

Soit la variable $x_{ij}$ représentant la production d'un produit à un mois donné, avec :

- *i* représente un type de vêtements :

  1 : brassières
  2 : grenouillères
  3 : vestes
  4 : capes
  5 : bonnets

- *j* représente les mois de l'année de production :

  1 : Septembre 1973
  2 : Octobre 1973
  3 : Novembre 1973
  4 : Décembre 1973
  5 : Janvier 1974
  6 : Février 1974
  7 : Mars 1974
  8 : Avril 1974
  9 : Mai 1974
  10 : Juin 1974
  11 : Juillet 1974

Soit la variable $p_i$ représentant le prix de vente HT du produit *i*.

### Calcul des bénéfices

On sait que la marge bénéficiaire de l'entreprise est de 15% sur le prix de vente du produit. Si on ne prend pas en compte les frais de stock, on obtient l'équation suivante pour la saison :

$$\sum_{j=11}^{11} 0.15 \times \left(p_1.x_{1j} + p_2.x_{2j} + p_3.x_{3j} + p_4.x_{4j} + p_5.x_{5j}\right)$$

$$= 0.15 \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{11} p_i.x_{ij}$$

### Calcul des frais de stock

Pour un mois donné, on considère que le nombre de produits stockés est égal à la moyenne du nombre de produits stockés en début de mois et du nombre de produits stockés en fin de mois. D'après l'énoncé, les frais de stock mensuels sont de 1% sur les prix de revient de chaque article.

Or le prix de revient d'un article est égal à la différence entre son prix de vente HT et la marge bénéficiaire, c'est-à-dire le prix de revient d'un article i est :

$$p_i - 0.15p_i = 0.85p_i$$

Les stocks sur le mois de septembre sont de (sachant qu'on part d'un stock nul au début de la saison) :

$$\frac{StockDebutSept + StockFinSept}{2} = \frac{0 + x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51}}{2} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_{i1}}{2}$$

Les frais de stocks en septembre sont donc de :

$$0.01 \times 0.85 \times \frac{\sum_{i=1}^{5} x_{i1}}{2}$$

Début octobre, une partie des stocks est écoulées car une commande passe. Les stocks sur ce mois sont de :

$$\frac{StockDebutOct + StockFinOct - commande}{2} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_{i1} + \sum_{i=1}^{5} x_{i1} - V_{i2}}{2}$$

Où $V_{ij}$ représente le nombre de commandes du produit *i* vendus entre **septembre et le mois *j*** (donc $V_{11} = 0$, $V_{12} = 1200$, $V_{13} = 1200$ …)

*Plus précisément, si $v_{ij}$ est le nombre de produits i vendus au mois j, alors*

$$V_{ij} = \sum_{k=1}^{j} v_{ik}$$

Les frais de stocks imputables en septembre sont donc :

$$0.01 \times 0.85 \times \frac{\sum_{i=1}^{5} p_i . x_{i1} - V_{i2}}{2}$$

Les stocks comptabilisés chaque mois dépendent des stocks des mois précédents (c'est le stock précédent + la moitié de la production du mois – les commandes). On pose donc $X_{ij}$ qui représente la production du produit *i* entre septembre et le mois *j*, on a donc :

$$X_{ij} = \sum_{k=1}^{j} x_{ik}$$

En continuant de la même manière jusqu'à fin juillet, on peut trouver la formule générale représentant le coût des stocks pour toute l'année en faisant la somme des coûts de chaque mois :

$$0.01 \times 0.85 \times \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{11} (X_{ij} - V_{ij}) . p_i$$

puisque les stocks (production et commandes) sont calculés chaque mois en plus des stocks du mois précédant.

**Fonction d'optimisation**

On cherche à maximiser les bénéfices de la société en prenant en compte les frais de stock engendrés par la production. En réunissant les 2 formules que nous avons trouvées pour le bénéfice et pour les frais de stocks, voici donc la modélisation de notre problème :

$$MAX\ f(x) = 0.15 \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{11} x_{ij} . p_i - 0.01 \times 0.85 \times \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{11} (X_{ij} - V_{ij}) . p_i$$

$$=> MAX\ f(x) = 0.15 \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{11} x_{ij} . p_i - 0.0085 \times \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{11} (X_{ij} - V_{ij}) . p_i$$

$$=> MAX\ f(x) = \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{11} p_i \left[0.15 \times x_{ij} - 0.0085 \times (X_{ij} - V_{ij})\right]$$

Avec :

$$X_{ij} = \sum_{k=1}^{j} x_{ik} \text{ (Production du produit } i \text{ au mois } j\text{)}$$

$$\text{Et } V_{ij} = \sum_{k=1}^{j} v_{ik} \text{ (Vente du produit } i \text{ au mois } j\text{)}$$

## 2. Recherche des contraintes

### 1er Contrainte : Le temps de tricotage

Les deux équipes font tourner les métiers en 2x9h / semaine. Soit au mois, un temps de travail de :

$$22 \times 2 \times 9 + 4 \times 5 = 416h$$

On pose $t_i$ le temps nécessaire de tricotage du produit $i$ en minutes (Par exemple $t_1 = 24$). D'où pour tout $j$ :

$$x_{1j} \times \frac{24}{60} + x_{2j} \times \frac{28}{60} + x_{3j} \times \frac{14}{60} + x_{4j} \times \frac{17}{60} + x_{5j} \times \frac{8}{60} \leq 416$$

$$\Leftrightarrow \ \frac{1}{60} \sum_{i=1}^{5} x_{ij}.\, t_i \leq 416$$

### 2ème Contrainte : Le temps de finissage

N'ayant pas d'informations sur le temps de travail des ouvrières à domicile, on considèrera comme contrainte de finissage uniquement la capacité totale hebdomadaire qui est de 17000 points. La capacité totale mensuelle de l'entreprise est donc $17000 \times 4$ soit 68000 points/mois. Sachant le nombre de points que vaut chaque article (exemple : Brassière = 4), nous avons, pour tout $j$, la contrainte :

$$4x_{1j} + 5x_{2j} + 1x_{3j} + 2x_{4j} + 3x_{5j} \leq 68000$$

**3ème Contrainte : Honorer les commandes**

Afin d'assurer le respect des commandes, les stocks doivent être suffisants aux dates prévues.

- Donc, pour la commande du 1er octobre, la contrainte suivante doit être respectée :

$$x_{11} \leq 1200$$

$$x_{21} \leq 700$$

$$x_{31} \leq 850$$

$$x_{41} \leq 600$$

$$x_{51} \leq 400$$

D'une façon plus générale, pour tout *i* on a :

$$x_{i1} \leq v_{i1}$$

*Où $v_{ij}$ est la vente du produit i pour le mois j.*

- De la même manière, pour la commande du mois de janvier, on a :

$$\sum_{j=1}^{4}(x_{1j}) - v_{11} \geq 3000$$
$$\sum_{j=1}^{4}(x_{2j}) - v_{21} \geq 2500$$
$$\sum_{j=1}^{4}(x_{3j}) - v_{31} \geq 2100$$
$$\sum_{j=1}^{4}(x_{4j}) - v_{41} \geq 2000$$
$$\sum_{j=1}^{4}(x_{5j}) - v_{51} \geq 1800$$

D'une façon plus générale pour tout *i* on a : $\sum_{j=1}^{4}(x_{ij}) - v_{i1} \geq v_{i2}$

*Où $v_{ij}$ est la vente du produit i pour le mois j.*

**$4^{ème}$ Contrainte : La production de la saison 73-74**

Pour la saison 1973-1974, la production de chaque produit ne doit pas dépasser celle de l'année précédente.

D'où :

$$\sum_{j=1}^{11} x_{1j} \leq 13900 \quad ; \quad \sum_{j=1}^{11} x_{2j} \leq 8400$$

$$\sum_{j=1}^{11} x_{3j} \leq 9780 \quad ; \quad \sum_{j=1}^{11} x_{4j} \leq 7416 \quad ; \quad \sum_{j=1}^{11} x_{5j} \leq 3700$$