EISTI

TD N°2 : Tests d'hypothèses

TESTS SUR UNE CARACTERISTIQUE

Exercice 1

Une machine produit des billes de roulement de diamètre fixe. Si elle fonctionne normalement, il y a une proportion de 5% de billes défectueuses. Si elle est déréglée, la proportion de billes défectueuses est de 10%.

Avant d'envoyer une commande à son client, il teste un lot de 500 billes. Soit X le variable aléatoire représentant le nombre de billes défectueuses sur ce lot. On sait que X suit une loi binomiale b(500,p) où p=0.05 si la machine fonctionne correctement et p=0.1 si la machine est déréglée.

1. Il décide de ne pas livrer son client si la machine est déréglée, c'est-à-dire si le nombre de billes défectueuses est supérieur ou égal à 50 (=500×10%).
   (a) Exprimer les hypothèses H_0 et H_1 ainsi que les risques de 1ère et 2ème espèces.
   (b) Calculer le risque de 1ère espèce.
   (c) Calculer la puissance du test et en déduire si un client doit acheter ou non un lot ayant subi un tel test.
2. Le fabricant re-définit son test en imposant un risque de 1ère espèce de 1%.
   (a) Déterminer la région critique du test.
   (b) Calculer sa puissance.
   (c) Enoncer les règles de décision avec les erreurs associées.
3. Le client décide lui aussi d'effectuer son test avec un risque de 1ère espèce de 1%.
   (a) Exprimer les hypothèses H_0 et H_1 ainsi que les risques de 1ère et 2ème espèces.
   (b) Déterminer la région critique du test.
   (c) Calculer sa puissance.
   (d) Enoncer les règles de décision avec les erreurs associées.
   (e) Sur un même lot, on trouve 35 billes défectueuses. Que se passe-t'il ?
4. Le fabricant et le client se mette d'accord pour effectuer chacun leur test de risque de 1ère espèce de 1% sur un échantillon de taille *n*.
   (a) Calculer la taille de l'échantillon afin que les deux tests donnent le même seuil critique.
   (b) Calculer les risques de 2ème espèce.

Exercice 2 **(Test moyenne – Trouver taille échantillon– Examen 2009-2010)**

Les habitants d'une région aéroportuaire se plaignent que le bruit des avions dépasse la limite autorisée de 80 décibels en moyenne imposée par la législation. On admet que l'intensité du bruit causé par les avions est une variable aléatoire X de loi gaussienne d'espérance μ et de variance 64.

On mesure un échantillon journalier de n=16 variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$ de l'intensité du bruit, et on effectue le test statistique suivant.

$$\begin{cases} H_0 : \mu=\mu_0=80 \text{ décibels} \\ H_1 : \mu=\mu_1=85 \text{ décibels} \end{cases}$$

1) Expliciter les risques de première et deuxième espèces. De quel point de vue est fait ce test ? Celui des habitant ou celui des responsables de l'aéroport ?
2) Quelle variable de décision faut-il choisir et quelle est sa loi ?
3) Déterminer graphiquement l'allure de la région critique et représenter sur le graphique les erreurs de première et deuxième espèces.
4) Calculer le seuil de la région critique pour un risque α=5%.
5) Calculer la puissance du test.
6) Enoncer les règles de décision avec les probabilités d'erreur.
7) La moyenne calculée sur l'échantillon est $\bar{x}=83$ décibels. Les habitants ont-ils raison de se plaindre ? Le test d'hypothèses ainsi établi leur est-il favorable ou défavorable ?
8) Combien faudrait-il faire de relevés journaliers, pour que le risque de deuxième espèce soit de 5% ?
9) Quelle serait alors le seuil de décision ?

Exercice 3 **(Test moyenne σ^2 inconnu – Test bilatéral)**

Un fabricant de conserves de petits pois produit des boîtes où l'étiquette annonce un poids net égoutté de 560gr. Il souhaite construire un test pour s'assurer, d'une part qu'il n'aura pas d'ennui à l'issu d'un contrôle éventuel, et d'autre part, que le poids moyen des boîtes n'est pas excédentaire. Pour ce faire, il compte prélever un lot de 25 boites et relever le poids moyen ainsi que l'écart-type.

1) Déterminer les hypothèses et expliciter les risques de 1$^{\text{ère}}$ et 2$^{\text{ème}}$ espèces.
2) Quelle est la variable de décision ? Préciser sa loi.
3) Déterminer graphiquement l'allure de la région critique.
4) Calculer les seuils de la région critique sachant que le risque de 1$^{\text{ère}}$ espèce est 10%.
5) Peut-on calculer la puissance du test ?
6) Il prélève un lot de 25 boites et il pèse un poids moyen de $\bar{x}=556\text{gr}$ avec un écart-type empirique $s^*=10\text{gr}$.
   Quelle décision doit-il prendre ?

Exercice 4 **(Test fréquence – Trouver taille échantillon – test bilatéral)**

Sur un échantillon de 900 naissances, on constate qu'il y a 470 garçons. Un généticien décide d'utiliser ces données pour effectuer le test suivant relatif aux proportions p et 1-p de naissances respectivement masculines et féminines :

$$H_0 : p=0.5$$
$$H_1 : p=0.55$$

1) Construire un test pour ces hypothèses avec un risque α=5%. Peut-on être satisfait du test ? Si non comment peut-on l'améliorer ?

2) Ce généticien effectue une nouvelle étude sur un échantillon de même taille. Il souhaite cette fois tester les hypothèses :

$$H_0 : p=0.5$$
$$H_1 : p\neq0.5$$

<u>Exercice supplémentaire</u> **(Test moyenne – Trouver taille échantillon)**

Un fabricant produit des piles dont la durée de vie suit une loi normale d'espérance annoncée à 80h et d'écart-type 6.44h. Suite à des réclamations, il veut vérifier si la qualité a baissé ou non. Dans le cas où la moyenne de la durée de vie est inférieure à 75h, il sera obligé de baisser le prix de vente.

1) Déterminer les hypothèses et expliciter les risques de $1^{ère}$ et $2^{ème}$ espèces.
2) Quelle est la variable de décision ? Préciser sa loi.
3) Déterminer graphiquement l'allure de la région critique.
4) Enoncer la règle de décision sachant que le fabricant souhaite maîtriser les deux erreurs avec $\alpha=0.025$ et $\beta=0.05$.

TESTS DE COMPARAISON D'ECHANTILLONS

<u>Exercice 5</u> **(Test comparaison moyenne)**

Une entreprise fabrique un médicament sur deux chaînes de production. On s'intéresse aux variations de la quantité d'une certaine substance A contenue dans chaque médicament. On a contrôlé le dosage de la substance A avec un échantillon de 100 médicaments à la sortie de chacune des deux chaînes de fabrication. On a trouvé un dosage moyen de 10.75mg pour la première chaîne et 10.70mg pour la deuxième. On sait par ailleurs que l'écart-type des chaînes de production est le même et est égal à 0.2mg.

Construire un test à 1% permettant de savoir si la différence des moyennes observées est due à des fluctuations de l'échantillonnage ou bien si la chaîne de fabrication n°1 produit des médicaments contenant davantage de substance A que la chaîne n°2.

<u>Exercice 6</u> **(Test comparaison taux)**

Un sondage effectué auprès de 2000 personnes indique que 19% d'entre elles connaissent la marque de lessive Omopaic. Après une campagne publicitaire, un sondage analogue auprès de 1000 personnes montre que 230 d'entre elles connaissent cette marque. Peut-on considérer que la campagne a été efficace ?

TESTS D'ADEQUATION ET D'INDEPENDANCE

Exercice 7 **(Test d'adéquation à une loi de Poisson)**
Pendant 200 minutes, on note toutes les minutes le nombre de voitures arrivant au poste de péage sur l'autoroute.

Nombre de voitures	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Effectif observé	1	15	30	46	38	30	16	13	5	3	2	1

Déterminer la loi de probabilité de cet échantillon.

Exercice 8 **(Test d'adéquation à une loi uniforme)**
On considère les données d'un essai visant à déterminer la solidité d'une corde d'escalade. Un morceau de 1 m corde est mis sous tension jusqu'à cassure. On se demande si la corde peut casser à n'importe endroit. On obtient les résultats suivants (en mètre):

0,1	0,4	0,4	0,6	0,7	0,7	0,8	0,9	0,9	0,9

1) Tracer la fonction de répartition empirique.
2) Ajouter sur le graphique la fonction de répartition de la loi U([0,1]).
3) La corde peut-elle casser à n'importe quel endroit ?
4) Déterminer la p-valeur du test.

Exercice 9 **(Test d'indépendance)**
Un traitement est administré à trois doses différentes D_1, D_2, D_3, à un groupe de sujets atteints d'une même maladie. L'expérimentation est faite en double aveugle. On compte le nombre de guérisons pour chaque dose. Les résultats sont les suivants :

	Sujets guéris	Sujets non guéris	Total
D_1	30	30	60
D_2	42	35	77
D_3	58	31	89
Total	130	96	226

L'efficacité du traitement est-elle liée à la dose utilisée ?

Correction

TESTS SUR UNE CARACTERISTIQUE

Exercice 1

- Fonctionnement normal : 5% de billes défectueuses
- Fonctionnement anormal : 10% de billes défectueuses

Variable de décision

Soit X le nombre de billes défectueuses sur un lot de 500 billes. X suit une loi b(n,p). Or n=500 est assez grand pour approcher la loi de X grâce au TCL. On considère donc que X suit une $N(\mu,\sigma^2)$ avec μ=np et σ^2=np(1-p). La valeur de p=0.05 (μ=25) si la machine fonctionne correctement et p=0.1 (μ=50) si elle est déréglée.

1) Test « naif » du fabricant.

(a) Les hypothèses

Etant donné que la machine est déréglée quand il y a 10% de billes défectueuses, le fabricant décide d'appliquer la règle de décision toute simple qui consiste à ne pas livrer s'il y a plus de 10% de billes défectueuses dans le lot, *i.e.* plus de 50 billes défectueuse. Nous avons donc le test suivant :

H_0 : la machine fonctionne correctement (p=0.05)
H_1 : la machine est déréglée (p=0.1)

avec la règle de décision :

- Si $X\geq 50$ j'accepte l'hypothèse H_1, *i.e* je ne livre pas la marchandise
- Si $X<50$ je garde l'hypothèse H_0, *i.e*, je livre la marchandise

Les risques (erreurs) encourus sont

- Risque de $1^{ère}$ espèce : Accepter H_1 alors que H_0 est vraie $\Leftrightarrow$ ne pas livrer de la marchandise de bonne qualité
- Risque de $2^{ème}$ espèce : Accepter H_0 alors que H_1 est vraie $\Leftrightarrow$ livrer de la marchandise de mauvaise qualité (perdre client)

(b) Risque de $1^{ère}$ espèce

On sait que $\alpha=P(\text{Accepter } H_1 \mid H_0 \text{ vraie})=P(X\geq 50 \mid H_0 \text{ vraie})$.

Supposons H_0 vraie alors p=0.05 donc X suit une $N(0.05n,\sigma_0^2)$ où $\sigma_0^2=0.95*0.05*n$, d'où

$$\alpha=P(X\geq 50)=P(\frac{X-0.05n}{\sqrt{0.95*0.05*n}}\geq\frac{50-0.05n}{\sqrt{0.95*0.05*n}}\sqrt{n})=P(Z\geq 5.13)=1.7*10^{-7}$$

où Z suit une loi N(0,1).

Le fabricant a donc 10^{-5}% de risque de ne pas livrer de la bonne marchandise.

(c) Calcul de la puissance

On sait que $1-\beta=P(\text{Accepter } H_1 \mid H_1 \text{ vraie})=P(X\geq 50 \mid H_0 \text{ vraie})$.

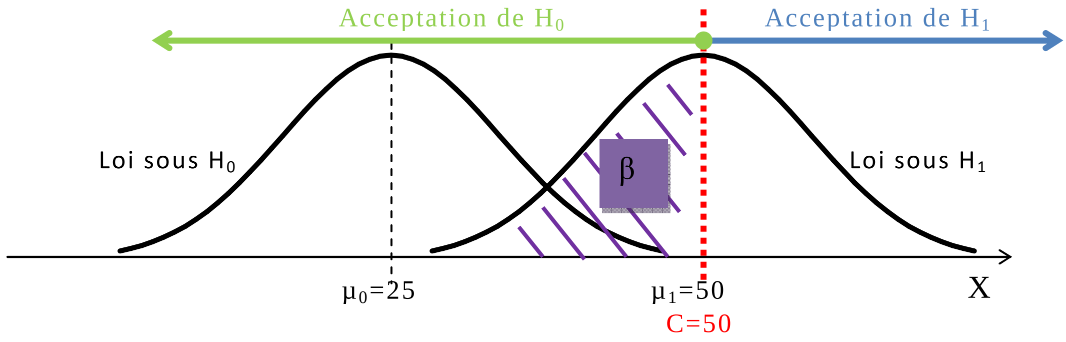
Supposons H_1 vraie alors p=0.1 donc X suit une $N(0.1n,\sigma_1^2)$ où $\sigma^2=0.9*0.1*n$, d'où

$$1-\beta=P(X\geq 50)=P(\frac{X-0.1*n}{\sqrt{0.9*0.1*n}}\geq\frac{50-0.1*n}{\sqrt{0.9*0.1*n}})=P(Z\geq 0)=0.5$$

$\Rightarrow \beta=0.5$

Le fabricant a une chance sur deux de livrer de la marchandise de mauvaise qualité !

Cette règle de décision n'est pas du tout à l'avantage du client et risque de faire perdre sa clientèle au fabricant.
Que se passe-t'il ?



Il suffit de décaler le seuil de décision vers la gauche pour faire diminuer β.

2) Test fabricant

On teste toujours les hypothèses

H_0 : la machine fonctionne correctement (p=0.05)

H_1 : la machine est déréglée (p=0.1)

mais cette fois la règle de décision n'est pas fixée.

(a) <u>Calcul de la région critique</u>

La région critique W est la région d'acceptation de H_1, donc ici $W=\{X\geq C\}$

On sait que $\alpha=P(W|H_0 \text{ vraie})=P(X\geq C\ |H_0 \text{ vraie})$.

Supposons H_0 vraie alors p=0.05 donc X suit une $N(0.05n,\sigma_0^2)$ où $\sigma_0^2=0.95*0.05*n$, d'où

$$\alpha=P(X\geq C)=P\left(\frac{X-0.05*n}{\sqrt{0.95*0.05*n}}\geq\frac{C-0.05*n}{\sqrt{0.95*0.05*n}}\right)$$

$\Leftrightarrow P(Z\geq C')=0.01$ où Z suit une loi N(0,1)

$\Rightarrow C'=2.33 \Rightarrow C=0.05n+2.33*\sqrt{0.95*0.05*n}=36.25$.

La règle de décision est maintenant la suivante :

- Si $X\geq 36.25 \Leftrightarrow X\geq 37$ alors il livre
- Si $X<36.25 \Leftrightarrow X\leq 36$ il ne livre pas

(b) <u>Calcul de la puissance</u>

On sait que $1-\beta=P(W|H_1 \text{ vraie})=P(X\geq 37\ |H_1 \text{ vraie})$.

Supposons H_1 vraie alors p=0.1 donc X suit une $N(0.1n,\sigma_1^2)$ où $\sigma^2=0.9*0.1*n$, d'où

$$1-\beta=P(X\geq 37)=P\left(\frac{X-0.1*n}{\sqrt{0.9*0.1*n}}\geq\frac{37-0.1*n}{\sqrt{0.9*0.1*n}}\right)=P(Z\geq -1.94)=P(Z<1.94)=0.9738$$

$\Rightarrow \beta=0.026$

(c) <u>Règles de décision</u>

- Si $X\geq 37$ alors il ne livre pas la marchandise (accepte H_1) avec 1% de risque qu'elle soit de bonne qualité (si H_0 est vraie)
- Si $X\leq 36$ alors il livre la marchandise (garde H_0) avec 2.6% de risque qu'elle soit de mauvaise qualité (si H_1 est vraie).

Cette règle semble plus raisonnable pour le client.

3) Test client

(a) Les hypothèses

On se place maintenant du point de vue du client et on teste les hypothèses

H_0 : la machine est déréglée (p=0.1)

H_1 : la machine fonctionne correctement (p=0.05)

avec la règle de décision :

- Si X≤C j'accepte l'hypothèse H_1, *i.e* j'accepte la marchandise
- Si X>C je garde l'hypothèse H_0, *i.e*, je refuse la marchandise

où le seuil C sera déterminer avec le risque de 1ère espèce.

Les risques (erreurs) encourus sont

- Risque de 1ère espèce : Accepter H_1 alors que H_0 est vraie ⇔ accepter le la marchandise de mauvaise qualité
- Risque de 2ème espèce : Accepter H_0 alors que H_1 est vraie ⇔ refuser de la marchandise de bonne qualité (prendre du retard)

(b) Calcul de la région critique

La région critique W est la région d'acceptation de H_1, donc maintenant W={X≤C}

On sait que $\alpha=P(W \mid H_0 \text{ vraie})=P(X\leq C \mid H_0 \text{ vraie})$.

Supposons H_0 vraie alors p=0.1 donc X suit une $N(0.1*n,\sigma_0^2)$ où $\sigma_0^2=0.9*0.1*n$, d'où

$$\alpha=P(X\leq C)=P\left(\frac{X-0.1*n}{\sqrt{0.9*0.1*n}}\leq\frac{C-0.1*n}{\sqrt{0.9*0.1*n}}\right)$$

$\Leftrightarrow P(Z\leq C')=0.01 \Leftrightarrow P(Z\geq -C')=0.01$ où Z suit une loi N(0,1)

$\Rightarrow C'=-2.33 \Rightarrow C=0.1*n-2.33*\sqrt{0.9*0.1*n}=34.37$.

La règle de décision est maintenant la suivante :

- Si X≤34.37 ⇔ X≤34 alors il accepte la marchandise
- Si X>34.37 ⇔ X≥35 il refuse la marchandise

(c) Calcul de la puissance

On sait que $1-\beta=P(W \mid H_1 \text{ vraie})=P(X\leq 34 \mid H_1 \text{ vraie})$.

Supposons H_1 vraie alors p=0.05 donc X suit une $N(0.05*n,\sigma_1^2)$ où $\sigma^2=0.95*0.05*n$, d'où

$$1-\beta=P(X\leq 34)=P\left(\frac{X-0.05*n}{\sqrt{0.95*0.05*n}}\leq\frac{34-0.05*n}{\sqrt{0.95*0.05*n}}\right)=P(Z\leq 1.85)=0.9678$$

$\Rightarrow \beta=0.032$

(d) Règles de décision

- Si X≤34 alors il accepte la marchandise (accepte H_1) avec 1% de risque qu'elle soit de mauvaise qualité (si H_0 est vraie)
- Si X≥35 alors il refuse la marchandise (garde H_0) avec 3.2% de risque qu'elle soit de bonne qualité (si H_1 est vraie).

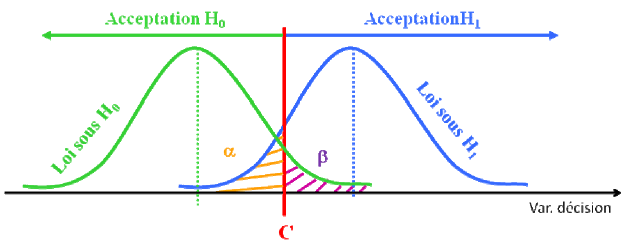
(e) Les deux tests sont équitables mais n'aboutissent pas à la même règle de décision et donc à un conflit potentiel. En effet, si sur un lot on compte 35 billes défectueuses alors le fabricant livre la marchandise et le client refuse.

Test commun

(a) On va donc établir un test qui aboutit à une règle de décision (un seuil) commun.

Dans un test d'hypothèse il y 4 variables d'ajustement :

- les erreurs α et β,
- le seuil de décision
- la taille de l'échantillon



Pour ce test, le risque de 1ère espèce est toujours fixé à $\alpha=1\%$, mais cette fois on ne fixe pas la taille de l'échantillon mais on impose une contrainte sur le seuil.

Seuil test fabricant (cf 2.a): $C_1 = 0.05n + 2.33*\sqrt{0.95*0.05*n}$

Seuil client (cf. 3.b) : $C_2 = 0.1*n - 2.33*\sqrt{0.9*0.1*n}$

On impose

$C_1 = C_2 \quad \Leftrightarrow \quad 0.05*n + 2.33*\sqrt{0.95*0.05*n} = 0.1*n - 2.33*\sqrt{0.9*0.1*n}$

$\Leftrightarrow \quad 2.33*\sqrt{n}*(\sqrt{0.95*0.05} + \sqrt{0.9*0.1}) = (0.1-0.05)*n$

$\Leftrightarrow \quad 1.21 = 0.05*\sqrt{n}$ car $n \neq 0$

$\Rightarrow \quad \sqrt{n} = 24.14 \quad \Rightarrow \quad n \approx 583$

$\Rightarrow \quad C = 0.1*583 - 2.33*\sqrt{0.9*0.1*583} = 41.4$

Ils adoptent donc la règle commune qui consiste à tester un échantillon de 583 billes et considérer que le lot est défectueux s'il y au moins 42 billes défectueuses dedans.

(b) Risques de 2nd espèce

<u>Fabricant</u> :

$1-\beta = P(W \mid H_1 \text{ vraie}) = P(X \geq 42 \mid H_0 \text{ vraie})$.

Supposons H_1 vraie alors p=0.1 donc X suit une $N(0.1n, \sigma_1^2)$ où $\sigma^2 = 0.9*0.1*n$, d'où

$$1-\beta = P(X \geq 37) = P\left(\frac{X-0.1*n}{\sqrt{0.9*0.1*n}} \geq \frac{42-0.1*n}{\sqrt{0.9*0.1*n}}\right) = P(Z \geq -2.29) = P(Z < 2.29) = 0.989$$

$\Rightarrow \beta = 1.1\%$

<u>Client</u> :

$1-\beta = P(W \mid H_1 \text{ vraie}) = P(X \leq 42 \mid H_0 \text{ vraie})$.

Supposons H_1 vraie alors p=0.05 donc X suit une $N(0.05*n, \sigma_1^2)$ où $\sigma^2 = 0.95*0.05*n$, d'où

$$1-\beta = P(X \leq 42) = P\left(\frac{X-0.05*n}{\sqrt{0.95*0.05*n}} \leq \frac{42-0.05*n}{\sqrt{0.95*0.05*n}}\right) = P(Z \leq 2.4) = 0.992$$

$\Rightarrow \beta = 0.8\%$

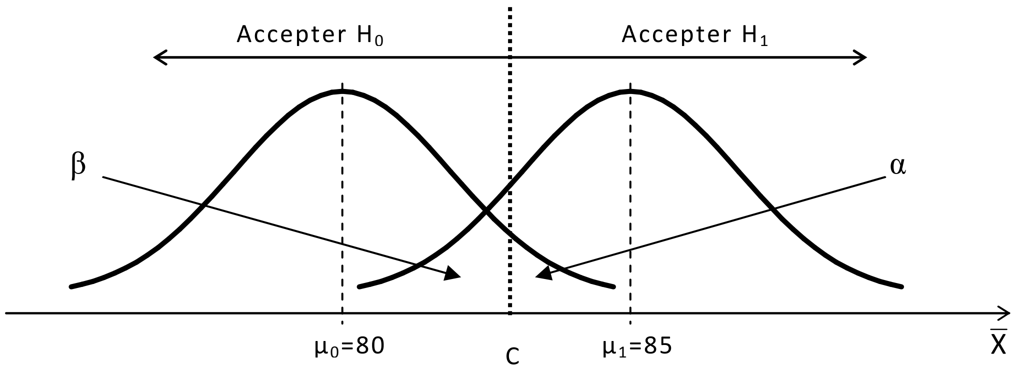
Le test est performant pour le client et pour le fabricant.

Exercice 2

1)
Risque de $1^{ère}$ espèce : Accepter H_1 alors que H_0 est vraie $\Leftrightarrow$ « décider que l'aéroport n'est pas aux normes alors qu'il respecte la législation »
Risque de 2^{nde} espèce : Accepter H_0 alors que H_1 est vraie $\Leftrightarrow$ « décider que l'aéroport est aux normes alors que le bruit dépasse le seuil autorisé »
Le test est donc fait du point de vue des responsables de l'aéroport.
2) La moyenne $\overline{X}$ est l'estimateur usuel de μ. L'échantillon est gaussien et σ²=64 est connu. Donc

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

3)



On en déduit que la région critique (région d'acceptation de H_1) est définie par
$W=\{\overline{X}>C\}$.
4) $\alpha = P(W|H_0)$ or sous l'hypothèses H_0, $\overline{X}$ suit une loi normale $N(80,8^2/n)$, d'où

$$\alpha = P(W|H_0) \Leftrightarrow 0.05 = P(\overline{X} > C) \Leftrightarrow 0.05 = P(\sqrt{n}\frac{\overline{X}-80}{8} > \sqrt{n}\frac{C-80}{8})$$
$$\Leftrightarrow 0.05 = P(Z > C')$$

où Z suit une loi N(0,1).
A l'aide de la table de la loi normale, on obtient C'=1.65 puis

$$C = 80 + 1.65 * \frac{8}{\sqrt{n}} \approx 83.3.$$

5) Sous l'hypothèse H_1, $\overline{X}$ suit une loi $N(85,8^2/n)$, d'où

$$1-\beta = P(W|H_1) = P(\overline{X} > C) = P(\sqrt{n}\frac{\overline{X}-85}{8} > \sqrt{n}\frac{C-85}{8})$$
$$= P(Z > -0.85) = 1 - P(Z > 0.85) = 0.2$$

6)
- Si $\overline{x} > 83.3$ décibels alors on accepte H_1, *i.e* on considère que l'aéroport n'est pas aux normes, avec 5% de chance de se tromper.
- Si $\overline{x} < 83.3$ alors on garde H_0, *i.e* on considère que l'aéroport est aux normes, avec 20% chance de se tromper.

7) La moyenne calculée sur l'échantillon est $\overline{x} = 83$<83.3. Donc les habitants n'ont pas de raison de se plaindre. Cependant, le risque de deuxième espèce étant très élevé, ils sont en droit de remettre en cause le test.

8) Supposons que la taille de l'échantillon ne soit pas fixée. Alors le risque de 1$^{\text{ère}}$ espèce donne l'équation

$$C = 80 + 1.65 * \frac{8}{\sqrt{n}}$$

Et le risque de deuxième espèce donne

$$1 - \beta = 0.95 = P(\sqrt{n}\frac{\overline{X} - 85}{8} > \sqrt{n}\frac{C - 85}{8}) = P(Z > C') = P(Z < -C') = 0.95$$

A l'aide de la table de la loi normale, on obtient C'=-1.65 puis

$$C = 85 - 1.65 * \frac{8}{\sqrt{n}}.$$

D'où

$$80 + 1.65 * \frac{8}{\sqrt{n}} = 85 - 1.65 * \frac{8}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \sqrt{n} = \frac{2 * 1.65 * 8}{85 - 80} \approx 5.3 \Rightarrow n \approx 27$$

et

$$C = 80 + 1.65 * \frac{8}{5.3} \approx 81$$

Il faudrait donc tester un échantillon de taille 27 et on aurait le seuil de décision à 81 décibels.

Exercice 3

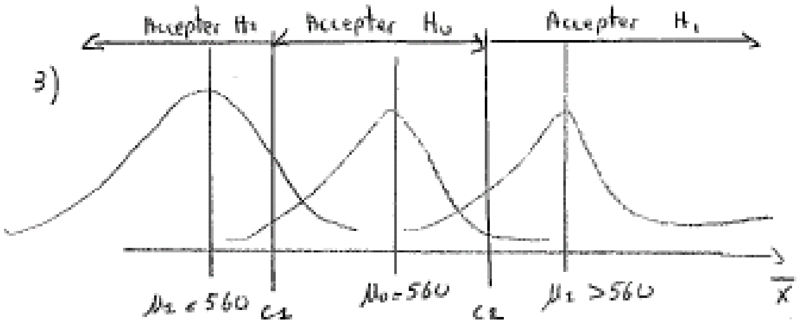
1) $\begin{cases} H_0 : \text{" poids conforme à celui annoncé "} : \mu = \mu_0 = 560 \\ H_1 : \text{" poids non conforme "} : \mu = \mu_1 < 560 \text{ ou } \mu = \mu_1 > 560 \end{cases}$

Risque de $1^{ère}$ espèce : Accepter H_1 alors que H_0 est vraie
$\Leftrightarrow$ Revoir la production alors qu'elle est conforme
Risque de $2^{ème}$ espèce : Accepter H_0 alors que H_1 vraie
$\Leftrightarrow$ considérer que le poids est conforme alors qu'il ne l'est pas

2) La moyenne $\overline{X}$ est un estimateur usuel de μ et sera donc la variable de décision. L'échantillon est de taille moyenne et l'écart-type est inconnu. On suppose donc que l'échantillon est gaussien, i.e que le poids d'une boite suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ où σ^2 inconnu.
On a alors

$$Z = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu}{S^*} \leadsto t_{n-1}$$

3)



Région critique :
$W = \{ \overline{X} \leq C_1 \text{ ou } \overline{X} \geq C_2 \}$
Région d'acceptation de H_0
$\overline{W} = \{ C_1 \leq \overline{X} \leq C_2 \}$

4) $\alpha = P[\,W \mid H_0 \text{ vraie}\,] \Leftrightarrow 1 - \alpha = P[\,\overline{W} \mid H_0 \text{ vraie}\,]$ artifice pour éliminer le " ou "

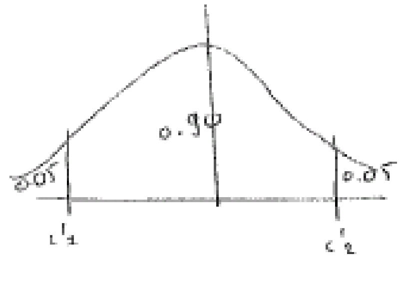
Supposons H_0 vraie alors $\sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - 560}{S^*} \leadsto t_{n-1}$, d'où

$$1 - \alpha = P[\overline{W}] = P[\,C_1 \leq \overline{X} \leq C_2\,] = P\left[\sqrt{n}\,\frac{C_1 - 560}{s^*} \leq \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - 560}{s^*} \leq \sqrt{n}\,\frac{C_2 - 560}{\sqrt{n}}\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad 0.90 = P[\,C'_1 \leq Z \leq C'_2\,]$$

On suppose un risque symétrique
De plus la loi de Student est symétrique par rapport à Oy d'où

$$\begin{cases} C'_1 = -C'_2 \\ P[\,Z \geq C'_2\,] = 0.05 \end{cases}$$



$$\underset{\text{table } t_{24}}{\Rightarrow} \begin{cases} C'_1 = -1.711 \\ C'_2 = 1.711 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 560 - \dfrac{1.711 * s^*}{\sqrt{n}} = 563.42 \\ C'_2 = 560 + \dfrac{1.711 * s^*}{\sqrt{n}} = 556.58 \end{cases}$$

4) On ne peut pas calculer la puissance du test car la loi de $\overline{X}$ sous l'hypothèse H_1 est inconnue car μ_1 n'est pas fixé.
5) $\overline{x} = 556 < C_1$, donc il accepte H_1, *ie* il revoir sa cycle de production, avec 10% de risque que celui-ci soit en bonne état.

Exercice 4

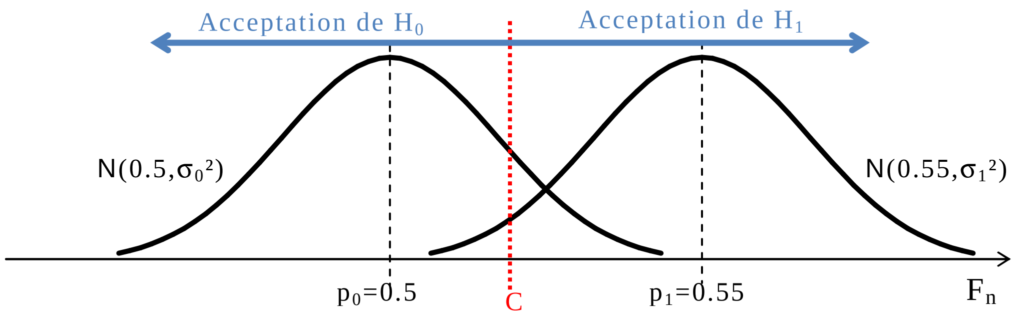
1)

$$H0 : p=0.5$$
$$H1 : p=0.55$$

(a) Variable de décision

La fréquence empirique F_n est un estimateur de p et avec un échantillon de taille 900, on peut considérer grâce au TCL que F_n suit une loi normale N(p,p(1-p)/n) où p=0.5 sous l'hypothèse H_0 et p=0.55 sous l'hypothèse H_1 .

(b) Allure de la région critique



La région critique W est la région d'acceptation de H_1 d'où $W=\{F_n \geq C\}$.

(c) Calcul du seuil

On sait que $\alpha=P(W \mid H_0 \text{ vraie})=P(F_n \geq C \mid H_0 \text{ vraie})$.

Supposons H_0 vraie alors F_n suit une $N(0.5,\sigma_0^2)$ où $\sigma_0^2=0.5*0.5/n$, d'où

$$\alpha=P(F_n \geq C)=P(\frac{F_n-0.5}{\sqrt{0.5*0.5}}\sqrt{n} \geq \frac{C-0.5}{0.5}\sqrt{n}) \Leftrightarrow P(Z \geq C')=0.05 \text{ où Z suit une loi N(0,1)}$$

$$\Rightarrow C'=1.64 \Rightarrow C=0.5+1.64*\frac{0.5}{\sqrt{n}}.$$

$$\Rightarrow C \approx 0.5+1.64*0.5/30 \approx 0.53$$

(d) Calcul de la puissance

On sait que $1-\beta=P(W \mid H_1 \text{ vraie})=P(F_n \geq C \mid H_0 \text{ vraie})$.

Supposons H_1 vraie alors F_n suit une $N(0.55,\sigma_1^2)$ où $\sigma^2=0.45*0.55/n$, d'où

$$1-\beta=P(F_n \geq C)=P(\frac{F_n-0.55}{\sqrt{0.55*0.45}}\sqrt{n} \geq \frac{C-0.55}{\sqrt{0.55*0.45}}\sqrt{n})=P(Z \geq -1.21)=P(Z<1.21)=0.89$$

$\Rightarrow \beta=0.11$

(d) Règles de décision

- Si $f_n \geq 0.53$ alors on accepte H_1, i.e on considère qu'il y a plus de garçons que de filles avec 5% de risque de se tromper.
- Si $f_n<0.53$ alors on garde H_0, i.e on considère qu'il y a autant de filles que de garçons avec 11% de risque se tromper.

L'échantillon considéré indique $f_n=470/900=0.52$ donc le généticien conclut qu'il y autant de garçons que de filles avec 11% de risque de se tromper.

(e) Taille échantillon

Le risque de $2^{\text{ème}}$ espèce n'est pas acceptable. Pour le réduire nous allons jouer sur la taille de l'échantillon.

L'erreur de première espèce donne une première équation

$$C=0.5+1.64*\frac{0.5}{\sqrt{n}}$$

Et si on impose une erreur de seconde espèce de 0.05 alors on obtient une deuxième équation

$$1-\beta=P(F_n\geq C)=P(\frac{F_n-0.55}{\sqrt{0.55*0.45}}\sqrt{n}\geq\frac{C-0.55}{\sqrt{0.55*0.45}}\sqrt{n})$$

$\Leftrightarrow$ $0.95=P(Z\geq C')$ $\Leftrightarrow$ $0.95=P(Z\leq -C')\Rightarrow$ -C'=1.64

$$C=0.55-1.64*\frac{\sqrt{0.55*0.45}}{\sqrt{n}}$$

d'où

$$C=0.55-1.64*\frac{\sqrt{0.55*0.45}}{\sqrt{n}}=0.5+1.64*\frac{0.5}{\sqrt{n}}$$

$$\Leftrightarrow\ 0.55-0.5=\frac{1.64}{\sqrt{n}}(0.5+\sqrt{0.55*0.45})$$

$$\Leftrightarrow\ \sqrt{n}=32.72\ \Rightarrow\ n\approx 1070$$

Si on souhaite diminuer l'erreur de $2^{ème}$ espèce, il faut tester un échantillon de taille au moins 1070.

2)

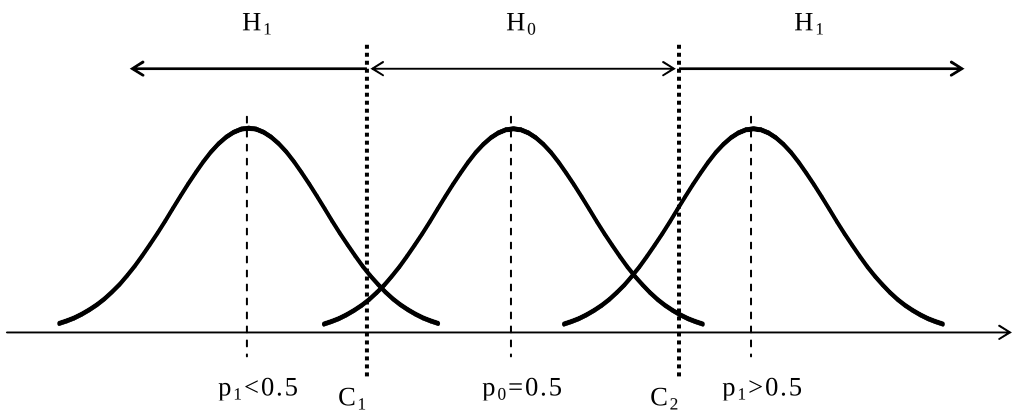
H0 : p=0.5

H1 : p≠0.5

Le test est maintenant bilatéral. Même estimateur, même lois.

(a) Région critique

La région critique W est la région d'acceptation de H_1 d'où $W=\{F<C_1 \text{ ou} F>C_2\}$



et $\overline{W}$ est la région d'acceptation de H_0 d'où $\overline{W}=\{C_1\leq F\leq C_2\}$ (cf. dessin).

(b) Calcul des seuils

On sait que $\alpha=P(W|H_0 \text{ vraie})=P(F<C_1 \text{ ou } F>C_2\ |H_0 \text{ vraie})$. Afin de simplifier le calcul de probabilité, on passe à $1-\alpha=P(\overline{W}\ |H_0 \text{ vraie})=P(C_1\leq F\leq C_2|H_0 \text{ vraie})$.

Supposons H_0 vraie alors F suit une $N(0.5,\sigma_0^2)$ où $\sigma_0^2=0.5*0.5/n$, d'où

$$1-\alpha=P(C_1\leq F\leq C_2)=P\left(\frac{C_1-0.5}{\sqrt{0.5*0.5}}\sqrt{n}\leq\frac{F-0.5}{\sqrt{0.5*0.5}}\sqrt{n}\leq\frac{C_2-0.5}{\sqrt{0.5*0.5}}\sqrt{n}\right)$$

$\Leftrightarrow$ $P(C'_1\leq Z\leq C_2')=0.05$.

On suppose que le risque est symétrique, or la loi normale centrée est aussi symétrique par rapport à 0, on a donc $C'_1=-C'_2$. D'où $P(C'_1\leq Z\leq C_2')=0.05$ $\Leftrightarrow$

$P(-C_2' \leq Z \leq C_2') = 0.05 \Leftrightarrow$ $F(C'_2)-F(-C'_2)=0.05$ où F est la fonction de répartition de Z $\Leftrightarrow$ $F(C'_2)-[1-F(C'_2)]=0.05$ $\Leftrightarrow$ $F(C'_2)=1.95/2=0.975$ $\Rightarrow$ $C'_2=1.96$ $\Rightarrow$ $C_2 = 0.5 + 1.96 * \sqrt{0.5*0.5}/\sqrt{n} = 0.53$ et $C_1 = 0.5 - 1.96 * \sqrt{0.5*0.5}/\sqrt{n} = 0.47$

(c) Règles de décision

- Si $f_n<0.47$ ou $f_n>0.53$, on accepte H_1, *i.e* on considère que la côte du président a changé avec 5% de chance de se tromper.
- Dans le cas contraire, on accepte H_0, i.e on considère que sa côte est stable, mais on ne connaît pas le risque encourus car on ne connaît pas la loi sous H_1.

Exercice supplémentaire

Soit X la durée de vie d'une pile. On sait que X suit une loi N(μ ,σ^2) où σ^2=6.44^2.

1) Hypothèses

H_0 : "durée de vie conforme" $\mu = \mu_0 = 80h$

H_1 : "durée de vie a baissé" $\mu = \mu_1 < 75 \Rightarrow \mu_1 = 75h$

Risque de 1ère espèce : Accepter H_1 alors que H_0 est vraie

$\Leftrightarrow$ baisser le prix des piles alors qu'elles sont de bonne qualité

Risque de 2ème espèce : Accepter H_0 alors que H_1 est vraie

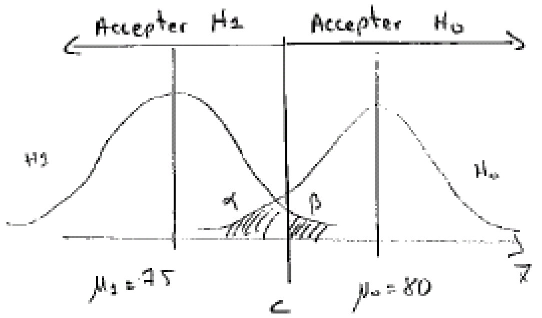
$\Leftrightarrow$ Vendre à prix fort des piles de mauvaise qualité

2) la moyenne $\overline{X}$ est un estimateur usuel de μ et est donc choisie comme variable de décision.

L'échantillon est gaussien avec σ^2 connu

$$\overline{X} \leadsto \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

3) Allure de la région critique



$$W = \{ \overline{X} < c \}$$

4) • $\alpha = P[W \mid H_0 \text{ vraie}]$

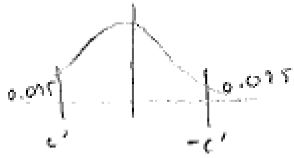
Supposons H_0 vraie alors $\overline{X} \leadsto \mathcal{N}\left(80, \frac{6.44^2}{n}\right)$ d'où

$$\alpha = P[W] = P[\overline{X} < c] = P\left[\frac{\overline{X} - 80}{6.44}\sqrt{n} < \frac{c - 80}{6.44}\sqrt{n}\right]$$

$\Leftrightarrow$ $0.025 = P[Z < c']$

$\Leftrightarrow$ $0.025 = P[Z > -c']$

$\overset{\text{table}}{\Rightarrow}$ $-c' = 1.96$



$$\boxed{c = 80 - \frac{1.96 \times 6.44}{\sqrt{n}}}$$

- $1-\beta = P[W \mid H_1 \text{ vraie}]$ d'où la nécessité de fixer μ_1

Supposons H_1 vraie alors $\bar{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}(75, \frac{6.44^2}{n})$ d'où

$1-\beta = P[W] = P[\bar{X} < C] = P\left[\frac{\bar{X}-75}{6.44}\sqrt{n} < \frac{C-75}{6.44}\sqrt{n}\right]$

$\Leftrightarrow 0.95 = P[Z < c'']$

$\overset{\text{table}}{\Rightarrow}$ $c'' = 1.64$

$$\boxed{c = 75 + \frac{1.64 \times 6.44}{\sqrt{n}}}$$

On obtient donc l'équation

$$80 - \frac{1.96 \times 6.44}{\sqrt{n}} = 75 + \frac{1.64 \times 6.44}{\sqrt{n}}$$

$\Leftrightarrow \quad 5 = \frac{6.44}{\sqrt{n}}[1.64 + 1.96]$

$\Rightarrow \quad \sqrt{n} = \frac{6.44}{5} \times 3.6 \simeq 4.63$

$\Rightarrow \quad n \simeq 21.49$

Afin de maitriser les risques de 1^{ere} et 2^{eme} espèce avec $\alpha = 0.025$ et $\beta = 0.05$, il doit tester 22 piles et alors

$$c = 75 + \frac{1.64 \times 6.44}{\sqrt{22}} = 77.25$$

- si $\bar{x} < 77.25$ alors il accepte H_1, i.e il baisse le prix des piles avec 2,5% de chance de se tromper
- si $\bar{x} \geq 77.25$ alors il garde H_0, i.e il vend les piles au prix fort avec 5% de chance de se tromper.

TESTS DE COMPARAISON D'ECHANTILLONS

Exercice 5

Hypothèses

Soit X le dosage de la substance A dans un médicament de la chaîne n°1
Y — n°2

On note $E(X)=\mu_1$, $E(Y)=\mu_2$ et $V(X)=\sigma^2=V(Y)=0.2^2$

On teste

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 > \mu_2 \end{cases} \iff \begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0 \end{cases}$$

Variable de décision

Les moyennes $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ sont des estimateurs usuels de μ_1 et μ_2 donc variables de décision. L'échantillon est de grande taille donc on considère d'après le T.C.L que

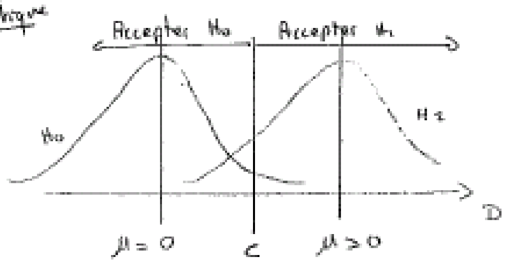
$$\overline{X} \leadsto \mathcal{N}\left(\mu_1, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \text{et} \quad \overline{Y} \leadsto \mathcal{N}\left(\mu_2, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Les variables $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ sont indépendantes donc

$$D = \overline{X} - \overline{Y} \leadsto \mathcal{N}\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{2\sigma^2}{n}\right)$$

Allure de la région critique

On pose $\mu = \mu_1 - \mu_2$



la région critique est

$$W = \{ D \geq C \}$$

Calcul du seuil

$$\alpha = P[\,W \mid H_0 \text{ vraie}\,]$$

Supposons H_0 vraie alors $D \leadsto \mathcal{N}\left(0, \frac{2\sigma^2}{n}\right)$ d'où

$$\alpha = P[D \geq C] = P\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\,\frac{1}{\sigma}\,D \geq \sqrt{\frac{n}{2}} \times \frac{1}{\sigma}\,C\right]$$

$$\iff 0.01 = P[Z \geq c'] \overset{\text{table}}{\implies} c' = 2.33 \implies C = \frac{2.33 \times \sigma \times \sqrt{2}}{\sqrt{n}} = 0.066$$

Décision

Sur l'échantillon on obtient

$$d = \bar{x} - \bar{y} = 10.75 - 10.70 = 0.05 < C$$

donc on garde l'hypothèse H_0, i.e on considère que la différence observée est due à la fluctuation de l'échantillon. On ne connaît pas l'erreur de se tromper en prenant cette décision puisque β est inconnu

Exercice 6

Hypothèses : Soit X_1 le taux de personnes connaissant la marque avant campagne
X_2 ——————— après ———

On note $E(X_1) = p_1$ et $E(X_2) = p_2$ et on teste les hypothèses

c'est l'hypothèse privilégiée mais par valeurs basses donc dans H_1 ⟶ $\begin{cases} H_0 : & p_1 = p_2 \\ H_1 : & p_1 < p_2 \end{cases} \iff \begin{cases} H_0 : & p_1 - p_2 = 0 \\ H_1 : & p_1 - p_2 < 0 \end{cases}$

Variables de décision : $\overline{X_1}$ la fréquence empirique sur échantillon 1 et $\overline{X_2}$ celle de échantillon sont des estimateurs usuels de p_1 et p_2 donc sont choisis comme variables de décision. On a des échantillons de grande taille donc le T.C.L permet de considérer que

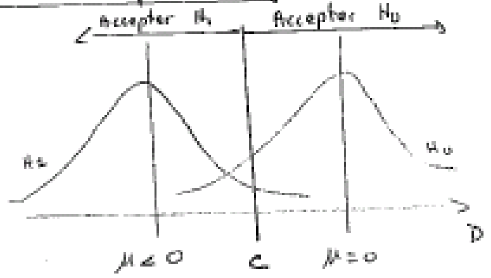
$$\overline{X_1} \leadsto \mathcal{N}\left(p_1, \frac{p_1(1-p_1)}{n_1}\right) \text{ et } \overline{X_2} \leadsto \mathcal{N}\left(p_2, \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right)$$

On note $D = \overline{X_1} - \overline{X_2}$. Etant donné que $\overline{X_1}$ et $\overline{X_2}$ sont indépendantes

$$D \leadsto \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

où $\mu = p_1 - p_2$ et $\sigma^2 = \dfrac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \dfrac{p_2(1-p_2)}{n_2}$

Allure de la région critique



$$W = \{ D \leq c \}$$

Calcul du seuil

$\alpha = P[\,W \mid H_0 \text{ vraie}\,]$

Supposons H_0 vraie alors $D \leadsto \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ avec $p_1 = p_2 = p$ donc

$\sigma^2 = p(1-p)\left[\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right]$ d'où

$$\alpha = P[D \leq c] = P\left[\frac{D}{\sigma} \leq \frac{c}{\sigma}\right] = P[Z \leq c'] \text{ où } Z \leadsto \mathcal{N}(0,1)$$

Si on suppose un risque $\alpha = 0.05$ on a

$$c' = -1.64 \implies c = -1.64 \times \sigma$$

On remplace p par une moyenne pondérée de $\overline{x_1}$ et $\overline{x_2}$ d'où

$$\hat{p} = \frac{n_1 \overline{x_1} + n_2 \overline{x_2}}{n_1 + n_2} = 0.203 \quad (\text{exo 6 TD n° 3})$$

D'où $c = -0.025$

<u>Décision</u>

sur l'échantillon on a

$$d = \bar{x}_2 - \bar{x}_1 = 0.19 - 0.23 = -0.04 < C$$

donc on accepte H_1, i.e on considère que la campagne a eu un impact avec 5% de chance de se tromper.

TESTS D'ADEQUATION ET D'INDEPENDANCE

Exercice 7

Soit X le nombre de voitures arrivant au poste de péage par minute. On a observé 200 minutes, donc on a un échantillon de taille n=200. ON suppose que X suit une loi de Poisson et on estime son paramètre par la moyenne des observations (cf. 1ère partie), 800/200=4. La question est de savoir si l'échantillon suit une loi $\mathscr{P}(4)$. Si cela est le cas alors l'effectif théorique de x_i est donné

$$n_i=n\times P(X=x_i)=200\times e^{-4}\times 4^{x_i}/(x_i)!$$

Nombre de voitures	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Effectif observé	1	15	30	46	38	30	16	13	5	3	2	1
Effectif théorique	4	15	29	39	39	31	21	12	6	3	1	0

Les effectifs des valeurs extrêmes étant petits (<5), on procède à un regroupement des deux premières et des quatre dernières.

Nombre de voitures	0-1	2	3	4	5	6	7	8-11
Effectif observé	16	30	46	38	30	16	13	11
Effectif théorique	19	29	39	39	31	21	12	10

La région critique est de la forme, $D_n>C$ et sous l'hypothèse H_0, D_n suit une loi $\chi^2_{(8-1-1)}$ (car un paramètre λ estimé). Donc si on prend un rique α=5%. On lit dans la table χ^2_6, C=12,6.

La valeur observée de D_n est

$$d_n=\frac{(16-19)^2}{19}+\ldots+\frac{(11-10)^2}{10}=3{,}196$$

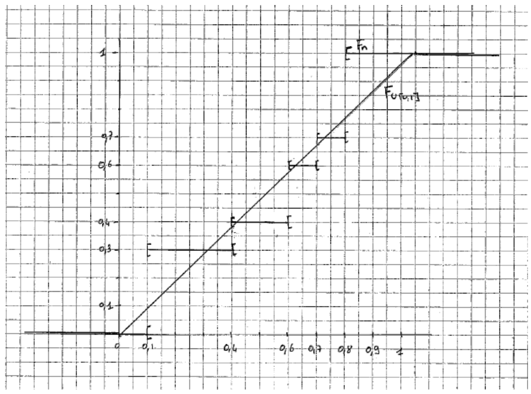
On a $d_n<12{,}6$ donc on accepte la loi théorique $\mathscr{P}(4)$ pour l'échantillon sans connaître le risque d'erreur.

Exercice 8

Si la corde peut se casser n'importe où, cela signifie que l'endroit où elle se casse suit une loi uniforme sur la longueur de la corde, *i.e.* une loi U[0,1].

Fonction de répartition empirique

Observation	0,1	0,4	0,4	0,6	0,7	0,7	0,8	0,9	0,9	0,9
F_n	1/10	3/10	3/10	4/10	6/10	6/10	7/10	1	1	1



Fonction de répartition U[0,1]

$$F(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & 0\leq t<1\\ 1 & t\geq 1\end{cases}$$

Construction du test :

En prenant un risque à 5% et avec un échantillon de taille n=10, on accepte H_0 si $K_n<0{,}409$ (cf. tableau cours)

Calcul de la valeur de K_n :

i	x_i	$F(x_i)$	$\lvert F(x_i)-i/n\rvert$	$\lvert F(x_i)-(i-1)/n\rvert$
1	0,1	0,1	0	0
2	0,4	0,4	0,2	0,3
3	0,4	0,4	0,1	0,2
4	0,6	0,6	0,2	0,3
5	0,7	0,7	0,2	0,3
6	0,7	0,7	0,1	0,2
7	0,8	0,8	0,1	0,2
8	0,9	0,9	0,2	0,2
9	0,9	0,9	0,1	0,1
10	0,9	0,9	0	0

$k_n=0{,}3<0{,}409$ donc on accepte H_0, c-a-d que la corde peut se casser n'importe où.

La p-valeur :

$$t=\sqrt{n}k_n=0{,}949 \Rightarrow p(0{,}949)\approx 2\sum_{j=1}^{3}(-1)^{j+1}e^{-2j^2 0{,}949^2}\approx 0{,}166$$

Cela signifie qu'il faudrait envisager un risque de première espèce de α=16,6% pour rejeter l'hypothèse H_0 à tord. Donc le test est accepté confortablement.

Exercice 9

1°/ Test utilisé.

S'agissant d'un problème d'indépendance de deux caractères qualitatifs, dose administrée et évolution de la maladie, nous utiliserons un test de c ².

Hypothèse (H_0) : les deux caractères sont indépendants.
Hypothèse (H_1) : les deux caractères ne sont pas indépendants.

Conditions d'application du test :

— Echantillon aléatoire indépendant.
— Tous les effectifs théoriques sont supérieurs ou égaux à 5.

2°/ Pratique du test.

Dans l'hypothèse (H_0), les deux caractères sont indépendants, donc la probabilité conjointe d'une modalité A_i et d'une modalité B_j est le produit des probabilités de A_i et de B_j.
La distribution théorique des effectifs, lorsque les effectifs marginaux théoriques sont choisis égaux aux effectifs marginaux observés, est alors donnée par la formule :

$$c_{ij} = \frac{n_{i.}\, n_{.j}}{n}$$

formule dans laquelle :

c_{ij} est l'effectif théorique de la case de la i-ème ligne, j-ème colonne, du tableau de contingence ;
$n_{i.}$ est l'effectif marginal de la i-ème ligne ;
$n_{.j}$ est l'effectif marginal de la j-ème colonne ;
n est l'effectif total ($n = 226$).

Les effectifs théoriques sont donnés dans le tableau :

	Sujets guéris	Sujets non guéris	Total
Dose D_1	34,51	25,49	60
Dose D_2	44,29	32,71	77
Dose D_3	51,19	37,81	89
Total	130	96	226

Tous les effectifs théoriques sont supérieurs à 5. Dans chaque case du tableau de contingence 3 × 2, la variable aléatoire suit à peu près une loi de Gauss et la variable

$$c^2 = \sum_{(i,j)} \frac{\left(o_{ij} - c_{ij}\right)^2}{c_{ij}} = \sum_{(i,j)} \frac{o_{ij}^2}{c_{ij}} - n$$

suit ce qu'on appelle une loi du Khi deux, ou loi de Pearson, à (3 − 1)(2 − 1) = 2 degrés de liberté.

La valeur observée de c ² est :

$$c^2_{obs} = 3{,}80$$

Le nombre de degrés de liberté du tableau de contingence 3 × 2 est 2 : ceci signifie que pour remplir les 6 = $l\,c$ cases du tableau de contingence, étant fixés 4 = $l + c - 1$ des 5 effectifs marginaux, il suffit de choisir 2 des effectifs conjoints pour pouvoir remplir toutes les autres cases du tableau par addition ou soustraction.

La table de la loi de Pearson à 2 degrés de liberté donne :

$$F_2(2{,}77) = 0{,}750 \text{ et } F_2(4{,}61) = 0{,}900$$

Pour la valeur observée 3,80 de c ², la valeur de la fonction de répartition F_2 est donc comprise entre 0,750 et 0,900, donc la probabilité pour que c ² soit égal ou supérieur à 3,8 est comprise entre 0,10 et 0,25 : c'est la probabilité critique p. Elle est supérieure à 5 %, on ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle (H_0).

3°/ Conclusion pratique.

Jusqu'à plus ample information, compte tenu de la taille de l'échantillon, on admettra que l'évolution de la maladie et la dose de médicament dans le traitement sont indépendants, au seuil de 5 %.
Autrement dit, les données ne montrent **pas d'influence significative** de la dose de médicament sur l'évolution de la maladie.